

POINTS DE HAUTEUR BORNÉE SUR LES HYPERSURFACES LISSES DES VARIÉTÉS TORIQUES

Teddy Mignot

27 novembre 2014

Résumé

Nous démontrons ici la conjecture de Batyrev et Manin pour le nombre de points de hauteur bornée des hypersurfaces de certaines variétés toriques dont le rang du groupe de Picard est 2. La méthode utilisée est inspirée de celle développée par Schindler pour le cas des hypersurfaces de l'espace biprojectif, qui elle-même s'inspire de la méthode du cercle de Hardy-Littlewood. La constante obtenue dans la formule asymptotique finale est exactement celle conjecturée par Peyre.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Préliminaires	4
2.1	Notations et premières propriétés	4
2.2	Hauteurs sur les hypersurfaces de variétés toriques	6
2.3	Cas des variétés toriques à $n + 2$ générateurs	11
3	Première étape	15
3.1	Une inégalité de Weyl	16
3.2	Géométrie des nombres	27
3.3	Les arcs mineurs	42
3.4	Les arcs majeurs	44
4	Deuxième étape	51
4.1	Somme d'exponentielles	52
4.2	Méthode du cercle	57
4.3	Le cas $d_2 = 1$	67

5	Troisième étape	70
5.1	Premier cas	71
5.1.1	Sommes d'exponentielles	71
5.1.2	Méthode du cercle	75
5.2	Deuxième cas	84
5.2.1	Somme d'exponentielles	84
5.2.2	Méthode du cercle	85
6	Quatrième étape	88
7	Cinquième étape	93
7.1	Un résultat intermédiaire	93
7.2	Formule asymptotique pour $N_{d,U}(B)$	99
8	Conclusion et interprétation des constantes	102
8.1	Étude de l'intégrale singulière J	104
8.2	Étude de la série singulière \mathfrak{S}	106
8.3	Conclusion	114

1 Introduction

On considère une variété torique complète lisse $X = X(\Delta)$ de dimension n définie par le réseau $N = \mathbf{Z}^n$ et un éventail Δ ayant $n+2$ arêtes engendrées par des vecteurs notés $v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \in \mathbf{R}^n$. De telles variétés ont été classifiées par Kleinschmidt dans [K]. Nous supposons par ailleurs que le groupe de Picard et le cône effectif de X sont engendrés par les classes de diviseurs associés aux arêtes de 2 vecteurs générateurs de l'éventail, disons v_0 et v_{n+1} . On note D_0 et D_{n+1} les diviseurs associés, et $[D_0]$, $[D_{n+1}]$ leurs classes dans $\text{Pic}(X)$. On peut alors écrire

$$\text{Pic}(X) = \mathbf{Z}[D_0] \oplus \mathbf{Z}[D_{n+1}],$$

$$C_{\text{Eff}}^1 = \mathbf{R}^+[D_0] + \mathbf{R}^+[D_{n+1}],$$

et la classe du diviseur anticanonique de X est de la forme

$$[-K_X] = n_1[D_0] + n_2[D_{n+1}]$$

avec $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$. D'autre part, pour $d_1, d_2 \in \mathbf{N}$ fixés considérons un diviseur de classe $d_1[D_0] + d_2[D_{n+1}]$ et une hypersurface Y de dimension supposée supérieure ou égale à 3, définie par une section de ce diviseur. On supposera que l'hypersurface choisie est lisse. La classe du diviseur anticanonique de Y est alors donnée par

$$[-K_Y] = (n_1 - d_1)[\tilde{D}_0] + (n_2 - d_2)[\tilde{D}_{n+1}],$$

où \tilde{D}_0 et \tilde{D}_{n+1} désignent les diviseurs induits par D_0 et D_{n+1} sur Y . En utilisant par exemple la construction décrite par Salberger dans [Sa, §10], on peut construire explicitement la hauteur H sur X associée à $(n_1 - d_1)[D_0] + (n_2 - d_2)[D_{n+1}]$. Elle induit une hauteur sur Y qui est la hauteur associée à $[-K_Y]$, et que l'on notera encore H . L'objectif est alors de donner une formule asymptotique pour le nombre

$$\mathcal{N}_U(B) = \text{Card}\{P \in Y(\mathbf{Q}) \cap U \mid H(P) \leq B\},$$

pour un ouvert U bien choisi. Plus précisément nous allons montrer (cf. proposition 8.1) que $\mathcal{N}_U(B)$ vérifie la conjecture de Manin, i.e que pour un nombre de variables $n + 2$ assez grand (condition analogue à celle donnée par Birch dans [Bi] pour les hypersurfaces de l'espace projectif), ce cardinal est de la forme

$$\mathcal{N}_U(B) = C_H(Y)B \log(B) + O(B),$$

où $C_H(Y)$ est la constante conjecturée par Peyre.

Dans la section 2 nous fixons précisément le cadre de notre étude. Nous y décrivons entre autres les variétés toriques auxquelles nous nous intéresserons, l'expression de la hauteur, et la forme des équations définissant les hypersurfaces. Nous montrons par ailleurs que le calcul de $\mathcal{N}_U(B)$ peut se ramener à celui de

$$N_{d,U}(B) = \text{card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}^{r+1} \times \mathbf{Z}^{m-r} \times \mathbf{Z}^{n-m+1}) \cap U \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \right. \\ \left. (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}), F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, |\mathbf{x}|^{m+1-d_1} \max \left(\frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|}, |\mathbf{z}| \right)^{n-r+1-d_2} \leq B \right\}$$

où m, r, d_1, d_2 sont des entiers fixés, et F un polynôme homogène de degré d_1 (resp. d_2) en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) (resp. (\mathbf{y}, \mathbf{z})).

La méthode utilisée pour évaluer les $N_{d,U}(B)$ est fortement inspirée de celle développée par Schindler dans [Sch2] pour traiter le cas des hypersurfaces des espaces biprojectifs. Cette méthode consiste dans un premier temps à donner une formule asymptotique pour le nombre $N_{d,U}(P_1, P_2)$ de points $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ de $U \cap \mathbf{Z}^{n+2}$ tels que $|\mathbf{x}| \leq P_1$ et $\max \left(\frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|}, |\mathbf{z}| \right) \leq P_2$ pour des bornes P_1, P_2 fixées. Dans la section 3, en utilisant des arguments issus de la méthode du cercle, on établit une formule asymptotique pour $N_{d,U}(P_1, P_2)$ lorsque P_1 et P_2 sont « relativement proches » en un sens que nous préciserons. Dans la section 4 (resp. 5), pour un $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^{r+1}$ (resp. $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n-m+1}$) fixé, on donne une formule asymptotique pour le nombre de points (\mathbf{y}, \mathbf{z}) (resp. (\mathbf{x}, \mathbf{y})) vérifiant $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ tels que $\max \left(\frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|}, |\mathbf{z}| \right) \leq P_2$ (resp. $|\mathbf{x}| \leq P_1$) en utilisant à nouveau la méthode du cercle. Les résultats

obtenus combinés avec ceux de la section 2 nous permettrons dans la section 6 d'établir une formule asymptotique pour $N_{d,U}(P_1, P_2)$ avec P_1, P_2 quelconques. Dans la section 7, on utilise les résultats établis par Blomer et Brüdern dans [B-B] pour conclure quant à la valeur de $N_{d,U}(B)$ à partir des estimations obtenues dans les sections précédentes. Enfin, dans la section 8, on conclut en démontrant le théorème 8.8 donnant une formule asymptotique pour $\mathcal{N}_U(B)$. On vérifie en particulier que la constante obtenue est bien celle avancée par Peyre dans [Pe].

2 Préliminaires

2.1 Notations et premières propriétés

Rappelons les définitions suivantes :

Définition 2.1. *Étant donné un réseau N , un éventail est un ensemble Δ de cônes polyédraux de $N_{\mathbf{R}} = N \otimes \mathbf{R}$ vérifiant :*

1. *Pour tout cône $\sigma \in \Delta$, on a $0 \in \sigma$;*
2. *Toute face d'un cône de Δ est un cône de Δ ;*
3. *L'intersection de deux cônes de Δ est une face de chacun de ces deux cônes.*

On dit de plus que l'éventail est

- *complet si $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = N_{\mathbf{R}}$,*
- *régulier si chaque cône de Δ est engendré par une famille de vecteurs pouvant être complétée en une base de $N_{\mathbf{R}}$.*

Pour tout éventail Δ nous noterons Δ_{\max} l'ensemble des cônes de dimension maximale, et pour tout cône $\sigma \in \Delta$, on notera $\sigma(1)$ l'ensemble des vecteurs générateurs des arêtes de σ . Pour un cône polyédral σ de $N_{\mathbf{R}}$ donné on définit semi-groupe

$$S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap N^{\vee},$$

où σ^{\vee} (resp. $N^{\vee} = M$) désigne le cône (resp. réseau) dual de σ (resp. N). La *variété torique affine* sur un corps k associée à σ est la variété affine :

$$(1) \quad U_{\sigma} = \text{Spec}(k[S_{\sigma}])$$

On remarque que si σ, τ sont deux cônes de $N_{\mathbf{R}}$, alors

$$\tau \subset \sigma \Rightarrow U_{\tau} \subset U_{\sigma}.$$

Étant donné un réseau N et un éventail Δ , on définit une variété algébrique $X = X(\Delta)$ sur k par recollement des ouverts U_{σ} pour $\sigma \in \Delta$. Nous renvoyons le lecteur à [F, §1,2,3] pour plus de détails sur les variétés toriques.

Remarquons que la variété $X(\Delta)$ est lisse (resp. complète) si Δ est régulier (resp. complet).

Dans ce qui va suivre nous allons considérer X une variété torique de dimension n définie par un éventail Δ à $d = n + r$ arêtes dont les générateurs seront notés dans cette section, $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+r} \in \mathbf{Z}^n$, et un réseau $N = \mathbf{Z}^n$. On note $D_1, \dots, D_n, \dots, D_{n+r}$ les diviseurs associés aux vecteurs générateurs (voir [F, §3.3]). Rappelons que dans le cas où la variété torique X est lisse, le groupe de Picard de X est de rang r . Pour simplifier nous allons imposer une première condition aux variétés toriques que nous considérerons : nous nous intéresserons exclusivement aux variétés toriques complètes lisses dont le cône effectif est simplicial et que tout diviseur effectif soit combinaison linéaire de r diviseurs D_i , disons $[D_{n+1}], \dots, [D_{n+r}]$. Une première question naturelle est de se demander si ceci peut se traduire en termes de propriétés sur les cônes de l'éventail. Nous allons répondre à cette question dans ce qui va suivre.

On souhaite donc avoir, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$[D_i] = \sum_{j=1}^r a_{i,j} [D_{n+j}]$$

avec $a_{i,j} \in \mathbf{N}$ pour tous i, j . Ceci équivaut à dire qu'il existe des entiers naturels $a_{i,j}$ tels que les diviseurs $D_i - \sum_{j=1}^r a_{i,j} D_{n+j}$ soient principaux pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$. Rappelons que les diviseurs principaux de X sont exactement les diviseurs $\text{div}(\chi^u)$ associés aux caractères χ^u du tore de X (voir [F]) pour $u \in M = N^\vee = \mathbf{Z}^n$ définis par :

$$\text{div}(\chi^u) = \sum_{k=1}^{n+r} \langle u, v_k \rangle D_k.$$

On cherche donc des vecteurs $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{Z}^n$ tels que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$(2) \quad \langle u_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$$

(i.e. (u_1, \dots, u_n) est la base duale de (v_1, \dots, v_n) au sens des espaces vectoriels) et

$$(3) \quad \langle u_i, v_k \rangle \leq 0$$

pour tout $k \in \{n+1, \dots, n+r\}$. Quitte à permuter les v_i , on peut supposer que (v_1, \dots, v_n) est une famille génératrice d'un cône maximal (i.e. de dimension n) de Δ . Puisque l'on a supposé que X est lisse, (v_1, \dots, v_n) est alors une

base du réseau \mathbf{Z}^n dont (u_1, \dots, u_n) est la base duale (au sens des réseaux). La condition (3) impose d'autre part que pour cette base duale (u_1, \dots, u_n) :

$$\forall k \in \{n+1, \dots, n+r\}, \quad \langle u_i, v_k \rangle \leq 0.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ceci soit vérifié est que :

$$v_{n+1}, \dots, v_{n+r} \in C\langle -v_1, -v_2, \dots, -v_n \rangle$$

où $C\langle -v_1, -v_2, \dots, -v_n \rangle$ désigne le cône de \mathbf{R}^n engendré par $-v_1, \dots, -v_n$.

Remarque 2.2. *Si l'on note*

$$\forall k \in \{1, \dots, r\}, \quad v_{n+k} = - \sum_{i=1}^n a_{i,k} v_i,$$

avec $a_{i,k} \in \mathbf{N}$, on vérifie qu'alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad [D_i] = \sum_{k=1}^r a_{i,k} [D_{n+k}].$$

2.2 Hauteurs sur les hypersurfaces de variétés toriques

Étant donnée une variété torique complète lisse X définie par un éventail Δ à $n+r$ arêtes et un réseau $N = \mathbf{Z}^n$, dont le groupe de Picard et le cône effectif sont engendrés par $[D_{n+1}], \dots, [D_{n+r}]$ (cf. section précédente), on considère la classe du diviseur anticanonique de X qui sera de la forme :

$$[-K_X] = \sum_{i=1}^{n+r} [D_i] = \sum_{k=1}^r n_k [D_{n+k}],$$

avec $n_1, \dots, n_r \in \mathbf{N}$. On considère alors un diviseur de classe $\sum_{k=1}^r d_k [D_{n+k}]$, avec $d_1, \dots, d_r \in \mathbf{N}$. Une section globale s du fibré en droites associé à ce diviseur sur X permet de définir une hypersurface de X que l'on notera Y . La classe du diviseur anticanonique sur Y sera induite par la classe du diviseur

$$(4) \quad D_0 = \sum_{k=1}^r (n_k - d_k) D_{n+k}.$$

Nous allons donner une construction de la hauteur associée à $\mathcal{O}(D_0)$ sur X . Pour cela, nous utiliserons la construction des hauteurs sur les variétés toriques décrite par Salberger dans [Sa].

Soit ν une place sur \mathbf{Q} , et $|\cdot|_\nu : \mathbf{Q}^* \rightarrow \mathbf{R}^+$ la valeur absolue associée. On pose, comme dans la section précédente, $N = \mathbf{Z}^n$, $M = N^\vee = \mathbf{Z}^n$ et

$U(\mathbf{Q}_\nu)$ le tore $\text{Hom}(M, \mathbf{Q}_\nu^*)$ qui peut être identifié avec un ouvert dense de Zariski de $X(\mathbf{Q}_\nu)$ à condition de fixer un point de cet ouvert. L'application $\log |\cdot|_\nu : \mathbf{Q}_\nu^* \rightarrow \mathbf{R}$ induit un morphisme

$$L : U(\mathbf{Q}_\nu) \rightarrow N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^n.$$

Pour tout $\sigma \in \Delta$, $L^{-1}(-\sigma)$ est un sous-ensemble fermé de $U(\mathbf{Q}_\nu)$. On note alors $C_{\sigma,\nu}$ l'adhérence de $L^{-1}(-\sigma)$ dans $X(\mathbf{Q}_\nu)$. On utilise ces ensembles $C_{\sigma,\nu}$ pour construire une norme $\|\cdot\|_{D,\nu}$ sur $\mathcal{O}(D)$ pour tout diviseur de Weil D sur X , via la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Soit $D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i$ un diviseur de Weil sur X et s une section locale analytique de $\mathcal{O}(D)$ définie en $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$. Le point $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$ appartient à $C_{\sigma,\nu}$ pour un certain $\sigma \in \Delta$. Soit $\chi^{u(\sigma)}$ un caractère sur U représentant le diviseur de Cartier correspondant à D sur U_σ (i.e. $\langle u(\sigma), v_i \rangle = -a_i$ pour tout $v_i \in \sigma(1)$). On pose alors :*

$$\|s(P)\|_{D,\nu} = |s(P)\chi^{u(\sigma)}(P)|_\nu,$$

et cette expression est indépendante du choix de $\sigma \in \Delta$ tel que $P \in C_{\sigma,\nu}$.

Démonstration. Voir [Sa, Proposition 9.2]. □

On a alors la proposition suivante qui nous sera utile par la suite.

Proposition 2.4. *Soit $D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i$ un diviseur de Weil sur X tel que $\mathcal{O}(D)$ est engendré par ses sections globales. Alors, pour $\sigma \in \Delta_{\max}$, si $\chi^{-u(\sigma)}$ désigne l'unique caractère sur U qui engendre $\mathcal{O}(D)$ sur U_σ (i.e. $\langle u(\sigma), v_i \rangle = -a_i$ pour tout $v_i \in \sigma(1)$), alors $\chi^{-u(\sigma)}$ est une section globale de $\mathcal{O}(D)$ et $\chi^{-u(\sigma)}(P) \neq 0$ pour tout $P \in U_\sigma(\mathbf{Q}_\nu)$. Si s est une section locale de $\mathcal{O}(D)$ définie en $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$, alors*

$$\|s(P)\|_{D,\nu} = \inf_{\sigma \in \Delta_{\max}} |s(P)\chi^{u(\sigma)}(P)|_\nu,$$

où Δ_{\max} désigne l'ensemble des cônes de Δ de dimension n . De plus, si D est ample et $\sigma \in \Delta_{\max}$, alors $C_{\sigma,\nu}$ est l'ensemble des $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$ tels que $|\chi^{u(\sigma)-u(\tau)}(P)|_\nu \leq 1$ pour tout $\tau \in \Delta_{\max}$.

Démonstration. Voir [Sa, Proposition 9.8]. □

On peut alors définir la hauteur associée à un diviseur D . Si $D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i$ est un diviseur de Weil sur X et $P \in X(\mathbf{Q})$, la hauteur associée à D est l'application $H_D : X(\mathbf{Q}) \rightarrow [0, \infty[$ définie par

$$H_D(P) = \prod_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})} \|s(P)\|_{D,\nu}^{-1},$$

où $\text{Val}(\mathbf{Q})$ désigne l'ensemble des places de \mathbf{Q} , et s une section locale de $\mathcal{O}(D)$ définie en P telle que $s(P) \neq 0$.

Remarque 2.5. Comme on peut le voir dans [Sa, Proposition 10.12], pour tout $P \in U(\mathbf{Q})$, $H_D(P)$ ne dépend que de la classe de D dans $\text{Pic}(X)$.

Par la suite, on notera H la hauteur sur X associée au diviseur D_0 défini par (4). Notre objectif sera alors d'évaluer

$$\mathcal{N}_V(B) = \text{Card}\{P \in V(\mathbf{Q}) \cap Y(\mathbf{Q}) \mid H_{D_0}(P) \leq B\},$$

pour un certain ouvert dense $V \subset U$ de X . Pour évaluer cette quantité il est plus pratique de se ramener à compter le nombre de points de hauteur bornée sur un torseur universel (voir [Sa, §3] pour la définition de torseurs universels) associé à X . Pour les variétés toriques, la construction du torseur universel est relativement simple et est donnée dans [Sa, §8]. Nous allons rappeler cette construction.

On considère le réseau $N_0 = \mathbf{Z}^{n+r}$ et $M_0 = N_0^\vee = \mathbf{Z}^{n+r}$. À tout générateur v_i d'une arête du cône Δ on associe l'élément $e_{0,i}$ de la base canonique de $N_0 = \mathbf{Z}^{n+r}$. On pose alors $N_1 = N_0$ et Δ_1 l'éventail constitué de tous les cônes engendrés par les $e_{0,i}$. La variété torique X_1 déterminée par (N_1, Δ_1) est alors l'espace affine \mathbf{A}^{n+r} . Pour tout $\sigma \in \Delta$, on note d'autre part σ_0 le cône de $N_{0,\mathbf{R}}$ engendré par les $e_{0,i}$ pour i tel que $v_i \in \sigma$. Les cônes σ_0 ainsi associés forment alors un éventail régulier Δ_0 de $N_{0,\mathbf{R}}$ (cf. [Sa, Proposition 8.4]), et (Δ_0, N_0) définit une variété torique $X_0 \subset X_1$. Soit $U_{0,\sigma} = \text{Spec}(\mathbf{Q}[S_{\sigma_0}])$ où $S_{\sigma_0} = \sigma_0^\vee \cap M_0$. Les morphismes toriques $\pi_\sigma : U_{0,\sigma} \rightarrow U_\sigma$ définies par les applications naturelles de σ_0 sur σ se recollent en un morphisme $\pi : X_0 \rightarrow X$ qui est alors un torseur universel sur X (cf. [Sa, Proposition 8.5]).

Étant donné que $X_0 \subset X_1 = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+r}$ les points de X_0 s'écrivent sous forme de $(n+r)$ -uplets de coordonnées $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+r})$. On notera alors pour tout diviseur $D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i$:

$$\mathbf{x}^D = \prod_{i=1}^{n+r} x_i^{a_i}.$$

Remarque 2.6. Si $\sigma \in \Delta$, on note

$$\underline{\sigma} = \sum_{i \mid v_i \notin \sigma(1)} D_i,$$

alors $U_{0,\sigma}$ est l'ouvert de X_1 déterminé par $\mathbf{x}^{\underline{\sigma}} \neq 0$, et donc X_0 est l'ouvert de X_1 défini par :

$$\mathbf{x} \in X_0 \Leftrightarrow \exists \sigma \in \Delta_{\max} \mid \mathbf{x}^{\underline{\sigma}} \neq 0.$$

En rappelant que $D_0 = \sum_{k=1}^r (n_k - d_k) D_{n+k}$, on définit alors les diviseurs $D(\sigma)$ associés :

Définition 2.7. Soit $\sigma \in \Delta_{\max}$, et soit $\chi^{u(\sigma)}$ le caractère de U tel que $\chi^{-u(\sigma)}$ engendre $\mathcal{O}(D_0)$ sur U_σ . On pose alors

$$D(\sigma) = D_0 + \sum_{v_i \in \sigma(1)} \langle -u(\sigma), v_i \rangle D_i.$$

Remarque 2.8. Les diviseurs $D(\sigma)$ ne dépendent que de la classe de D_0 dans $\text{Pic}(X)$.

Lemme 2.9. Soit $\sigma \in \Delta_{\max}$. Si $\mathcal{O}(D_0)$ est engendré par ses section globales, alors $\chi^{-u(\sigma)}$ est une section globale de $\mathcal{O}(D_0)$, et $D(\sigma)$ est un diviseur effectif à support contenu dans $\bigcup_{v_i \notin \sigma(1)} D_i$.

Démonstration. Si $\mathcal{O}(D_0)$ est engendré par ses sections globales alors, pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$, il existe une section globale de $\mathcal{O}(D_0)$ qui engendre $\mathcal{O}(D_0)$ sur U_σ . Or, U_σ est un espace affine, donc à multiplication par un scalaire près, il existe une unique section locale qui engendre $\mathcal{O}(D_0)$ sur U_σ . Donc la section locale $\chi^{-u(\sigma)}$ est en fait une section globale.

Puisque $\chi^{-u(\sigma)}$ est une section globale, on a d'après la description de $\Gamma(X, D_0)$ donnée dans [F, p.68] :

$$\langle -u(\sigma), v_i \rangle \geq -a_i$$

où $a_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $a_{n+k} = (n_k - d_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$. De plus, on a

$$\langle -u(\sigma), v_i \rangle = -a_i$$

pour tout i tel que $v_i \in \sigma(1)$. Donc $D(\sigma)$ est bien effectif et à support contenu dans $\bigcup_{v_i \notin \sigma(1)} D_i$. \square

Nous pouvons à présent définir une fonction hauteur H_0 sur $X_0(\mathbf{Q})$ en posant simplement $H_0 = H \circ \pi$.

Proposition 2.10. On suppose que $\mathcal{O}(D_0)$ est engendré par ses sections globales. Avec les notation ci-dessus, on a :

$$\forall P_0 = \mathbf{x} \in X_0(\mathbf{Q}), \quad H_0(P_0) = \prod_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})} \sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\mathbf{x}^{D(\sigma)}|_\nu.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est directement inspirée de la preuve de [Sa, Proposition 10.14]. On considère un point $P_0 \in X_0(\mathbf{Q})$, $P = \pi(P_0)$, et $\tau \in \Delta_{\max}$ tel que $P \in U_\tau$. On a alors que $\chi^{-u(\tau)}$ est une section locale définie en $P \in U_\tau$, et

$$\|\chi^{-u(\tau)}(P)\|_{D_0, \nu} = \inf_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\chi^{u(\sigma) - u(\tau)}|_\nu.$$

Remarquons que puisque $P \in U_\tau$, d'après le lemme 2.9, $\mathbf{x}^{D(\tau)} \neq 0$ (étant donné que $D(\tau)$ est effectif à support contenu dans $\bigcup_{v_i \notin \sigma(1)} D_i$), et que

$$\frac{\mathbf{x}^{D(\sigma)}}{\mathbf{x}^{D(\tau)}} = \chi^{u(\tau)-u(\sigma)}(P).$$

Par conséquent, si s désigne la section locale $\chi^{-u(\tau)}$, on a alors :

$$\|s(P)\|_{D_0, \nu}^{-1} = \sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} \left| \frac{\mathbf{x}^{D(\sigma)}}{\mathbf{x}^{D(\tau)}} \right|_\nu.$$

De plus, par la formule du produit, on a

$$\prod_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})} |\mathbf{x}^{D(\tau)}|_\nu = 1.$$

D'où le résultat. □

De la même manière que nous avons construit X_0 , on peut construire un \mathbf{Z} -torseur universel sur la variété \tilde{X} sur \mathbf{Z} obtenue à partir des ouverts affines $\tilde{U}_\sigma = \text{Spec}(\mathbf{Z}[S_\sigma])$ (voir [Sa, p. 207]). On notera ce torseur $\tilde{\pi} : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}$. On considère alors la proposition suivante (issue de [Sa, Proposition 11.3]) :

Proposition 2.11. *Soit $P_0 = \mathbf{x} \in X_0(\mathbf{Q})$ qui se relève en un \mathbf{Z} -point $\tilde{P}_0 = \tilde{\mathbf{x}}$ de \tilde{X}_0 . On a alors*

$$H_0(P_0) = \sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\tilde{\mathbf{x}}^{D(\sigma)}|,$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue usuelle sur \mathbf{R} .

Démonstration. Remarquons que comme précédemment on a une immersion ouverte $\tilde{X}_0 \hookrightarrow \mathbf{Z}^{n+r}$. Soit p un nombre premier, et soit

$$Y_0 \subset \text{Spec}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[(x_i)_{1 \leq i \leq n+r}])$$

la réduction modulo p de \tilde{X}_0 . On a alors, comme précédemment, que $\tilde{\mathbf{x}}^{D(\sigma)} \neq 0$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour un certain $\sigma \in \Delta$. On a donc que $\sup_{\tau \in \Delta_{\max}} |\tilde{\mathbf{x}}^{D(\tau)}|_p = 1$, et ainsi

$$H_0(P_0) = \prod_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})} \sup_{\tau \in \Delta_{\max}} |\tilde{\mathbf{x}}^{D(\tau)}|_\nu = \sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\tilde{\mathbf{x}}^{D(\sigma)}|. \quad \square$$

Plutôt que de compter les \mathbf{Q} -points de hauteur bornée de X , nous allons compter les \mathbf{Z} -points de \tilde{X}_0 en utilisant le lemme ci-dessous :

Lemme 2.12. *Pour $m \in \mathbf{N}$, soient*

$$c(m) = \text{Card}\{P \in U(\mathbf{Q}) \mid H(P) = m\},$$

$$c_0(m) = \text{Card}\{P \in \tilde{X}_0 \cap U_0(\mathbf{Q}) \mid H_0(P_0) = m\}.$$

Alors $c(m) = c_0(m)/2^r$.

Démonstration. Voir démonstration de [Sa, Lemme 11.4.a)]. □

Ainsi, étant donné un ouvert de Zariski V de X , si l'on note

$$\mathcal{N}_{0,V}(B) = \text{Card}\{P_0 \in \tilde{Y}_0(\mathbf{Z}) \cap U_0(\mathbf{Q}) \cap \pi^{-1}(V) \mid H_0(P_0) \leq B\}$$

(où \tilde{Y}_0 est l'hypersurface de \tilde{X}_0 correspondant à l'hypersurface Y de X), on a alors

$$\mathcal{N}_V(B) = \mathcal{N}_{0,V}(B)/2^r.$$

Nous chercherons donc dorénavant à évaluer $\mathcal{N}_{0,V}(B)$. Nous allons le faire pour le cas des variétés toriques complètes lisses à $n+2$ générateurs (i.e. cas où $r = 2$). Nous allons d'abord, dans la section suivante, décrire ces variétés, puis construire la hauteur sur les toseurs universels correspondants.

2.3 Cas des variétés toriques à $n+2$ générateurs

On considère $n+2$ vecteurs $v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \in \mathbf{Z}^n$ tels que (v_1, \dots, v_n) forme une base de \mathbf{Z}^n et

$$\begin{cases} v_0 = -\sum_{i=1}^r v_i - \sum_{i=r+1}^m a_i v_i \\ v_{n+1} = -\sum_{i=r+1}^n v_i, \end{cases}$$

où $1 \leq r \leq m \leq n$, et $a_i \in \mathbf{Z}$. On pose alors $I = \{0, \dots, r\}$ et $J = \{r+1, \dots, n+1\}$. On considère alors l'éventail Δ défini par les cônes maximaux :

$$\sigma_{i,j} = C\langle (v_k)_{\substack{k \in I \\ k \neq i}}, (v_l)_{\substack{l \in J \\ l \neq j}} \rangle$$

pour tous $i \in I$ et $j \in J$. D'après [K, Théorème 1], nous savons que toute variété torique complète lisse dont l'éventail Δ admet $n+2$ arêtes est isomorphe à une variété torique de ce type pour un certain $(r, m, (a_i)_{i \in \{r+1, \dots, m\}})$ fixé.

Dans ce qui va suivre, pour simplifier, nous nous intéresserons exclusivement à la sous-famille de ces variétés définies par $a_{r+1} = \dots = a_m = 1$ de sorte que $v_0 = \sum_{i=1}^m v_i$.

Remarquons à présent que dans ce cas précis, d'après les résultats obtenus dans la section 2.1, si, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, D_i désigne le diviseur associé à v_i , on a :

$$\begin{array}{lll} [D_1] = [D_0] & [D_{r+1}] = [D_0] + [D_{n+1}] & [D_{m+1}] = [D_{n+1}] \\ [D_2] = [D_0] & [D_{r+2}] = [D_0] + [D_{n+1}] & [D_{m+2}] = [D_{n+1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [D_r] = [D_0] & [D_m] = [D_0] + [D_{n+1}] & [D_n] = [D_{n+1}] \end{array}$$

La classe du diviseur anticanonique de X est alors donné par (cf. [F])

$$[-K_X] = \sum_{i=0}^{n+1} [D_i] = (m+1)[D_0] + (n-r+1)[D_{n+1}].$$

Considérons à présent une hypersurface Y de X donnée par une section globale s de $\mathcal{O}(D)$ où D désigne le diviseur $d_1 D_0 + d_2 D_{n+1}$. Le diviseur anticanonique de Y est alors le diviseur induit par

$$(m+1-d_1)[D_0] + (n-r+1-d_2)[D_{n+1}].$$

Remarque 2.13. Dans tout ce qui va suivre, nous supposons que la diviseur anticanonique de Y appartient à l'intérieur du cône effectif. Ce qui revient à dire, d'après ce qui précède que $m+1 > d_1$ et $n-r+1 > d_2$.

D'autre part, les sections globales de $\mathcal{O}(D)$ sont données par (cf. [F, §3.4]) :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(D)) = \bigoplus_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n} \mathbf{C} \cdot \chi^u,$$

où χ^u est le caractère associé à u , et P_D le polytope :

$$P_D = \{u \in \mathbf{Z}^n \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}, \langle u, v_k \rangle \geq 0, \\ \langle u, v_0 \rangle \geq -d_1 \text{ et } \langle u, v_{n+1} \rangle \geq -d_2\}$$

Chaque section (à coefficients rationnels) $s = \sum_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n} \alpha_u \chi^u$ où $\alpha_u \in \mathbf{Q}$ définit une hypersurface Y (que l'on suppose lisse) de X , et se relève en une fonction $f : \tilde{X}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par pour tous $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Q}^{n+2}$ tels que $x_0 \neq 0$ et $z_{n+1} \neq 0$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n} \alpha_u \prod_{i=0}^r x_i^{\langle u, v_i \rangle} \prod_{j=r+1}^m y_j^{\langle u, v_j \rangle} \prod_{k=m+1}^{n+1} z_k^{\langle u, v_k \rangle}.$$

L'hypersurface de \tilde{X}_0 définie par l'annulation de cette fonction correspond alors au torseur universel au-dessus de Y . Par conséquent, en utilisant le lemme 2.12, on a que les \mathbf{Q} -points de Y correspondent (modulo l'action des

points de torsion de T_{NS}) aux \mathbf{Z} -points $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ de \tilde{X}_0 tels que $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ où F est le polynôme :

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = x_0^{d_1} z_{n+1}^{d_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ = \sum_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n} \alpha_u \left(x_0^{d_1 + \langle u, v_0 \rangle} z_{n+1}^{d_2 + \langle u, v_{n+1} \rangle} \prod_{i=1}^r x_i^{\langle u, v_i \rangle} \prod_{j=r+1}^m y_j^{\langle u, v_j \rangle} \prod_{k=m+1}^n z_k^{\langle u, v_k \rangle} \right)$$

Remarque 2.14. – On remarque que le polynôme ainsi défini est de degré homogène égal à d_1 en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) et de degré homogène d_2 en (\mathbf{y}, \mathbf{z}) , c'est-à-dire, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$:

$$F(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mu \mathbf{y}, \mu \mathbf{z}) = \lambda^{d_1} \mu^{d_2} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

En effet le degré de chaque monôme en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) est

$$d_1 + \langle u, v_0 \rangle + \sum_{i=1}^m \langle u, v_i \rangle = d_1,$$

car $v_0 = -\sum_{i=1}^m v_i$, et de même pour (\mathbf{y}, \mathbf{z}) .

– Réciproquement on peut voir que tout polynôme en $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ de degré homogène d_1 en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) et de degré homogène d_2 en (\mathbf{y}, \mathbf{z}) est un polynôme correspondant à une unique section globale s de $\mathcal{O}(D)$.

Remarque 2.15. Dans tout ce qui va suivre on supposera que l'hypersurface Y définie par $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ est lisse. En fait cette propriété est vraie pour un ouvert dense de Zariski de coefficients $(\alpha_u)_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n}$. En effet on réalise un plongement de X dans un espace projectif \mathbf{P}^N en considérant l'application f qui à $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ associe la classe de

$$\left(x_0^{d_1 + \langle u, v_0 \rangle} z_{n+1}^{d_2 + \langle u, v_{n+1} \rangle} \prod_{i=1}^r x_i^{\langle u, v_i \rangle} \prod_{j=r+1}^m y_j^{\langle u, v_j \rangle} \prod_{k=m+1}^n z_k^{\langle u, v_k \rangle} \right)_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n}.$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Bertini (cf. [Ha]), pour une famille ouverte dense d'hyperplans projectifs $H_\alpha = \{(X_u)_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n} \mid \sum_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n} \alpha_u X_u = 0\} \subset \mathbf{P}^N$, on a que $X \cap H_\alpha$ est lisse. Or on remarque que $X \cap H_\alpha = Y$ et par conséquent, Y est lisse pour un ouvert dense de coefficients $(\alpha_u)_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n}$.

Nous allons à présent construire la hauteur sur X associée au diviseur $D_Y = (m+1-d_1)D_0 + (n-r+1-d_2)D_{n+1}$ (correspondant au diviseur anticanonique sur Y). Comme précédemment, d'après [F, §3.4], les sections globales de $\mathcal{O}(D_Y)$ sont données par :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(D_Y)) = \bigoplus_{u \in P_{D_Y} \cap \mathbf{Z}^n} \mathbf{C} \cdot \chi^u,$$

où P_{D_Y} est le polytope :

$$P_{D_Y} = \{u \in \mathbf{Z}^n \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}, \langle u, v_k \rangle \geq 0, \\ \langle u, v_0 \rangle \geq m+1-d_1 \text{ et } \langle u, v_{n+1} \rangle \geq n-r+1-d_2\}$$

Une base des sections globales est donc donnée par les $(\chi^u)_{u \in P_{D_Y}}$, qui se relèvent en des fonctions $(f_u)_{u \in P_{D_Y}}$ de \tilde{X}_0 dans \mathbf{R} qui sont exactement les monômes en $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ de degrés $(m+1-d_1)$ en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) et de degré $(n-r+1-d_2)$ en (\mathbf{y}, \mathbf{z}) . La hauteur H associée à D_Y est donc définie sur $\tilde{X}_0(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}^{n+2}$ par pour tout $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \tilde{X}_0(\mathbf{Z})$:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}) &= \max_{\substack{\forall i,j,k, \alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in \mathbf{N} \\ \sum_{i=0}^r \alpha_i + \sum_{j=r+1}^m \beta_j = m+1-d_1 \\ \sum_{j=r+1}^m \beta_j + \sum_{k=m+1}^{n+1} \gamma_k = n-r+1-d_2}} \prod_{i=0}^r |x_i|^{\alpha_i} \prod_{j=r+1}^m |y_j|^{\beta_j} \prod_{k=m+1}^{n+1} |z_k|^{\gamma_k} \\ &= \max_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N} \\ \alpha + \beta = m+1-d_1 \\ \beta + \gamma = n-r+1-d_2}} |\mathbf{x}|^\alpha |\mathbf{y}|^\beta |\mathbf{z}|^\gamma \\ &= \max\{|\mathbf{x}|^{m+1-d_1} |\mathbf{z}|^{n-r+1-d_2}, |\mathbf{x}|^{(m+1-d_1)-(n-r+1-d_2)} |\mathbf{y}|^{n-r+1-d_2}\} \\ &= |\mathbf{x}|^{m+1-d_1} \max\left(\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}, |\mathbf{z}|\right)^{n-r+1-d_2}. \end{aligned}$$

Remarquons enfin que dans le cas présent, $\tilde{X}_0(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}^{n+2}$ peut être décrit comme l'ensemble des $(n+2)$ -uplets d'entiers notés $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, avec $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_r)$, $\mathbf{y} = (y_{r+1}, \dots, y_m)$, $\mathbf{z} = (z_{m+1}, \dots, z_{n+1})$ tels que (cf. [Sa, 11.5]) :

$$(5) \quad \exists \sigma \in \Delta_{\max} \mid \mathbf{q}^\sigma \neq 0,$$

$$(6) \quad \text{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}}(\mathbf{q}^\sigma) = 1,$$

où

$$(7) \quad \mathbf{q}^\sigma = \prod_{i \notin \sigma(1)} q_i.$$

Par la définition de Δ , et des cônes maximaux $(\sigma_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, on observe que :

$$\mathbf{q}^{\sigma_{i,j}} = \prod_{l \notin \sigma_{i,j}(1)} q_l = q_i q_j.$$

Par conséquent, la condition (5) équivaut à :

$$\exists (i, j) \in I \times J \mid q_i q_j \neq 0$$

soit encore

$$\exists i \in I \mid q_i \neq 0, \text{ et } \exists j \in J \mid q_j \neq 0,$$

et donc (5) équivaut à :

$$(8) \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ et } (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq \mathbf{0}.$$

De même, on remarque que :

$$\begin{aligned} \text{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}}(\mathbf{q}^\sigma) &= \text{pgcd}_{(i,j) \in I \times J}(q_i q_j) \\ &= (\text{pgcd}_{i \in I} q_i)(\text{pgcd}_{j \in J} q_j) \\ &= \text{pgcd}(\mathbf{x}) \text{pgcd}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \end{aligned}$$

et la condition (6) équivaut donc à

$$(9) \quad \text{pgcd}(\mathbf{x}) = 1 \text{ et } \text{pgcd}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1.$$

Ainsi, calculer

$$\mathcal{N}(B) = \text{card}\{P \in Y(\mathbf{Q}) \mid H(P) \leq B\}$$

revient à calculer le nombre de points de

$$\{\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \tilde{X}_0(\mathbf{Z}) \mid H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq B\}.$$

Par ailleurs, quitte à appliquer une inversion de Möbius (en un sens que nous préciserons ultérieurement), on peut se ramener au calcul de

$$\begin{aligned} N_{d,U}(B) &= \text{card} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ &\quad F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, H_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq B\} \end{aligned}$$

pour un certain ouvert U que nous préciserons ultérieurement, et pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, avec

$$(10) \quad H_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = |\mathbf{x}|^{m+1-d_1} \max \left(\frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|}, |\mathbf{z}| \right)^{n-r+1-d_2}.$$

Dans ce qui va suivre nous allons donc chercher à obtenir une formule asymptotique pour $N_{d,U}(B)$.

3 Première étape

Nous allons établir une formule asymptotique pour $N_{U,d}(B)$, pour un $d \in \mathbf{N}^*$ fixé, en nous inspirant de la méthode décrite par Schindler dans

[Sch1] et [Sch2]. L'idée générale est de considérer la fonction $h_d : \mathbf{N}^2 \rightarrow [0, \infty[$ définie par

$$(11) \quad h_d(k, l) = \text{card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid |\mathbf{x}| = k, \right. \\ \left. \max \left(\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor, |\mathbf{z}| \right) = l \text{ et } F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\}$$

(où U est un ouvert de Zariski de \mathbf{A}^{n+2} que nous préciserons ultérieurement), de donner des formules asymptotiques pour

$$\sum_{k \leq P_1} \sum_{l \leq P_2} h_d(k, l), \quad \sum_{k \leq P_1} h_d(k, l) \quad \text{et} \quad \sum_{l \leq P_2} h_d(k, l),$$

afin de pouvoir appliquer un résultat de Blomer et Brüdern (voir [B-B]) pour en déduire une formule asymptotique pour

$$\sum_{k^{m+1-d_1} l^{n-r+1-d_2} \leq B} h_d(k, l) \sim_{B \rightarrow \infty} N_{U,d}(B).$$

Dans cette première partie, pour des réels $P_1, P_2 \geq 1$ fixés, nous allons chercher à calculer

$$(12) \quad N_d(P_1, P_2) = \text{card} \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (P_1 \mathcal{B}_1 \times P_1 P_2 \mathcal{B}_2 \times P_2 \mathcal{B}_3) \cap \mathbf{Z}^{n+2} \mid \\ |\mathbf{y}| \leq d|\mathbf{x}|P_2 \text{ et } F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \},$$

où $\mathcal{B}_1 = [-1, 1]^{r+1}$, $\mathcal{B}_2 = [-1, 1]^{m-r}$, $\mathcal{B}_3 = [-1, 1]^{n-m+1}$. Plus précisément, nous allons montrer que pour n assez grand on a :

$$N_d(P_1, P_2) = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ + O(d^v P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \min\{P_1, P_2\}^{-\delta}),$$

où σ_d est une constante (ne dépendant que de d), $\delta > 0$ un réel arbitrairement petit et v un réel que nous préciserons. Ceci qui nous permettra plus tard d'obtenir une formule pour $\sum_{k \leq P_1} \sum_{l \leq P_2} h_d(k, l)$.

3.1 Une inégalité de Weyl

Dans toute cette partie nous allons supposer $1 \leq P_2 \leq P_1$. On notera donc $P_1 = P_2^b$ avec $b \geq 1$. Nous allons évaluer $N_d(P_1, P_2)$ en nous inspirant de la méthode du cercle de Hardy-Littlewood. Pour cela, on introduit la fonction génératrice définie par

$$(13) \quad S_d(\alpha) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^{r+1} \\ |\mathbf{x}| \leq P_1}} \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{m-r} \\ |\mathbf{y}| \leq d|\mathbf{x}|P_2}} \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n-m+1} \\ |\mathbf{z}| \leq P_2}} e(\alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

pour $\alpha \in [0, 1]$, et où e désigne la fonction $x \mapsto \exp(2i\pi x)$. On remarque alors que

$$N_d(P_1, P_2) = \int_0^1 S_d(\alpha) d\alpha.$$

Étant donnés $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^{r+1}$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{m-r}$, on constate que

$$|\mathbf{y}| \leq d|\mathbf{x}|P_2 \Leftrightarrow |\mathbf{x}| \geq \frac{|\mathbf{y}|}{dP_2} \Leftrightarrow |\mathbf{x}| \geq \left\lceil \frac{|\mathbf{y}|}{dP_2} \right\rceil.$$

En posant $N = \left\lceil \frac{|\mathbf{y}|}{dP_2} \right\rceil$ (ce qui équivaut à dire que $|\mathbf{y}| \in]d(N-1)P_2, dNP_2]$), on remarque que $S(\alpha)$ peut être réexprimé sous la forme :

$$S_d(\alpha) = \sum_{N=1}^{P_1} S_{d,N}(\alpha),$$

où

$$(14) \quad S_{d,N}(\alpha) = \sum_{N \leq |\mathbf{x}| \leq P_1} \sum_{d(N-1)P_2 < |\mathbf{y}| \leq dNP_2} \sum_{|\mathbf{z}| \leq P_2} e(\alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

Si

$$\mathcal{E}_N = \{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{m-r} \mid d(N-1)P_2 < |\mathbf{y}| \leq dNP_2\},$$

on remarque que

$$\mathcal{E}_N = \bigcup_{\mathcal{I} \subset \{r+1, \dots, m\}} \mathcal{B}_{N,\mathcal{I}},$$

où

$$\mathcal{B}_{N,\mathcal{I}} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{E}_N \mid \forall i \in \mathcal{I}, y_i \geq 0 \text{ et } \forall i \notin \mathcal{I}, y_i < 0\}.$$

On observe par ailleurs que l'on peut écrire pour tout \mathcal{I} :

$$(15) \quad \mathcal{B}_{N,\mathcal{I}} = \bigcup_{\substack{\mathcal{J} \subset \{r+1, \dots, m\} \\ \mathcal{J} \neq \emptyset}} \mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}},$$

avec

$$(16) \quad \mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{B}_{N,\mathcal{I}} \mid \forall j \in \mathcal{J}, |y_j| > d(N-1)P_2 \text{ et } \forall j \notin \mathcal{J}, |y_j| \leq dNP_2\}.$$

On a alors

$$(17) \quad S_{d,N}(\alpha) \ll \sum_{\substack{\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \{r+1, \dots, m\} \\ \mathcal{J} \neq \emptyset}} |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|$$

où

$$(18) \quad S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha) = \sum_{|\mathbf{x}| \leq P_1} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}} \sum_{|\mathbf{z}| \leq P_2} e(\alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

Par une inégalité de Hölder, on a, pour N fixé

$$(19) \quad |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \ll P_1^{(r+1)(2^{d_2-1}-1)} \sum_{|\mathbf{x}| \leq P_1} |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J},\mathbf{x}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}}$$

où l'on a noté

$$(20) \quad S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J},\mathbf{x}}(\alpha) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}} \sum_{|\mathbf{z}| \leq P_2} e(\alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

Dans ce qui va suivre, nous allons chercher à « linéariser » le polynôme F en appliquant un opérateur Δ défini de la façon suivante : pour tout polynôme f à N variables on pose pour tous $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{R}^N$:

$$\Delta_{\mathbf{t}_1}(\mathbf{t}_2) = f(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) - f(\mathbf{t}_1).$$

Dans ce qui suit, nous appliquons $d_2 - 1$ fois l'opérateur Δ à F en les variables (\mathbf{y}, \mathbf{z}) , et nous obtenons un polynôme en $d_2(n - r + 1) + r + 1$ variables $(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(j)}, \mathbf{z}^{(j)})_{j \in \{1, \dots, d_2\}}$. Puis, en appliquant l'opérateur Δ $d_1 - 1$ fois à ce polynôme en les variables $(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(j)})_{j \in \{1, \dots, d_2\}}$, nous obtenus finalement un polynôme en $(r + 1)d_1 + (m - r)d_1d_2 + (n - m + 1)d_2$ variables du type $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}$ de la forme :

$$\begin{aligned} \Gamma_d^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) &+ G_1 \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \\ &+ G_2 \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) \end{aligned}$$

où G_1 (resp. G_2) est indépendant de $(\mathbf{x}^{(d_1)}, \mathbf{y}^{(j,d_1)})_{j \in \{1, \dots, d_2\}}$ (resp. $(\mathbf{y}^{(d_2,i)}, \mathbf{z}^{(d_2)})_{i \in \{1, \dots, d_1\}}$), et $\Gamma_d^{(1)}$ est linéaire en $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)})_{j \in \{1, \dots, d_2\}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, d_1\}$ et linéaire en $(\mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1\}}$ pour tout $j \in \{1, \dots, d_2\}$.

Pour $N, \mathcal{I}, \mathcal{J}$ fixés, posons

$$\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} = \mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} \times P_2\mathcal{B}_3 \subset dP_1P_2\mathcal{B}_2 \times P_2\mathcal{B}_3,$$

et on définit

$$\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}^D = \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} - \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(t)}, \mathbf{z}^{(t)})) \\ = \bigcap_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t) \in \{0,1\}^t} (\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} - \varepsilon_1(\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}) - \dots - \varepsilon_t(\mathbf{y}^{(t)}, \mathbf{z}^{(t)})). \end{aligned}$$

Si l'on note $\mathcal{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (pour \mathbf{x} fixé), et

$$(21) \quad \begin{aligned} & \mathcal{F}_t((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(t)}, \mathbf{z}^{(t)})) \\ &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t) \in \{0,1\}^t} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t} \mathcal{F}(\varepsilon_1(\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}) + \dots + \varepsilon_t(\mathbf{y}^{(t)}, \mathbf{z}^{(t)})), \end{aligned}$$

en utilisant l'équation (11.2) de [Schm], on obtient la majoration

$$\begin{aligned} |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J},\mathbf{x}}|^{2^{d_2-1}} &\ll |\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}^D|^{2^{d_2-1}-d_2} \sum_{(\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}) \in \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}^D} \dots \sum_{(\mathbf{y}^{(d_2-2)}, \mathbf{z}^{(d_2-2)}) \in \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}^D} \\ &\left| \sum_{\substack{(\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)}) \\ \in \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-2)}, \mathbf{z}^{(d_2-2)}))}} e(\mathcal{F}_{d_2-1}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)}))) \right|^2 \end{aligned}$$

que l'on peut encore majorer par

$$\begin{aligned} &((dP_1P_2)^{m-r} P_2^{n-m+1})^{2^{d_2-1}-d_2} \sum_{\substack{|\mathbf{y}^{(1)}| \leq 2dP_1P_2 \\ |\mathbf{z}^{(1)}| \leq 2P_2}} \dots \sum_{\substack{|\mathbf{y}^{(d_2-2)}| \leq 2dP_1P_2 \\ |\mathbf{z}^{(d_2-2)}| \leq 2P_2}} \\ &\left| \sum_{\substack{(\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)}) \\ \in \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-2)}, \mathbf{z}^{(d_2-2)}))}} e(\mathcal{F}_{d_2-1}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)}))) \right|^2 \end{aligned}$$

On remarque que pour tous $(\mathbf{y}, \mathbf{z}), (\mathbf{y}', \mathbf{z}') \in \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-2)}, \mathbf{z}^{(d_2-2)}))$ on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{d_2-1}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}, \mathbf{z})) - \mathcal{F}_{d_2-1}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}', \mathbf{z}')) \\ &= \mathcal{F}_{d_2}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2)}, \mathbf{z}^{(d_2)})) - \mathcal{F}_{d_2-1}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)})), \end{aligned}$$

pour

$$(\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)}) \in \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-2)}, \mathbf{z}^{(d_2-2)}))^D$$

et

$$(\mathbf{y}^{(d_2)}, \mathbf{z}^{(d_2)}) \in \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)})),$$

donnés par :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{y}^{(d_2)}, \mathbf{z}^{(d_2)}), \\ & (\mathbf{y}', \mathbf{z}') = (\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)} + \mathbf{y}^{(d_2)}, \mathbf{z}^{(d_2)}). \end{aligned}$$

On obtient donc la majoration :

$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J},\mathbf{x}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \ll (d^{m-r} P_1^{m-r} P_2^{n-r+1})^{2^{d_2-1}-d_2} \sum_{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}} \dots \sum_{\mathbf{y}^{(d_2-2)}, \mathbf{z}^{(d_2-2)}} \sum_{\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)}} \sum_{\mathbf{y}^{(d_2)}, \mathbf{z}^{(d_2)}} e(\mathcal{F}_{d_2}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2)}, \mathbf{z}^{(d_2)}) - \mathcal{F}_{d_2-1}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)}))).$$

où chaque $\mathbf{y}^{(i)}$ (resp. $\mathbf{z}^{(i)}$) appartient à une union de boîtes de taille au plus dP_1P_2 (resp. P_2).

D'après [Schm][Lemme 11.4], on a que

$$\mathcal{F}_{d_2}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2)}, \mathbf{z}^{(d_2)})) - \mathcal{F}_{d_2-1}((\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}), \dots, (\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)})) = \alpha F_1(d\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}}) + \alpha F_2(d\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}).$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} &= (\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2)}) & \tilde{\mathbf{z}} &= (\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(d_2)}) \\ \hat{\mathbf{y}} &= (\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2-1)}) & \hat{\mathbf{z}} &= (\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(d_2-1)}). \end{aligned}$$

avec F_1 est une forme multilinéaire en $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ de la forme :

$$\sum_{\mathbf{i}=(i_1, \dots, i_{d_2}) \in \{r+1, \dots, n+1\}^{d_2}} E_{\mathbf{i}}(d\mathbf{x}) t_{i_1}^{(1)} \dots t_{i_{d_2}}^{(d_2)}$$

où

$$t_i^{(j)} = \begin{cases} y_i^{(j)} & \text{si } i \in \{r+1, \dots, m\} \\ z_i^{(j)} & \text{si } i \in \{m+1, \dots, n+1\} \end{cases}$$

pour tout $j \in \{1, \dots, d_2\}$, et $E_{\mathbf{i}}(d\mathbf{x})$ symétrique en \mathbf{i} . Remarquons par ailleurs que F_1 et F_2 sont homogènes de degré d_1 en $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}})$.

Pour $\tilde{\mathbf{z}} \in [-P_2, P_2]^{d_2(n-m+1)}$ fixé, on note

$$S_{d,\tilde{\mathbf{z}}}(\alpha) = \sum_{|\mathbf{x}| \leq P_1} \sum_{\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2)}} e(\alpha F_1(d\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}}) + \alpha F_2(d\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})),$$

et d'après ce qui précède, on a

$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \ll (P_1^{r+1})^{2^{d_2-1}-1} ((dP_1P_2)^{m-r})^{2^{d_2-1}-d_2} (P_2^{n-m+1})^{2^{d_2-1}-d_2} \sum_{|\tilde{\mathbf{z}}| \leq P_2} |S_{d,\tilde{\mathbf{z}}}(\alpha)|.$$

En posant $\tilde{d} = d_1 + d_2 - 2$, on en déduit :

$$(22) \quad |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\tilde{d}}} \ll (P_1^{r+1})^{2^{\tilde{d}}-2^{d_1-1}} ((dP_1P_2)^{m-r})^{2^{\tilde{d}}-d_22^{d_1-1}} \\ (P_2^{n-m+1})^{2^{\tilde{d}}-d_22^{d_1-1}} \left(\sum_{|\tilde{\mathbf{z}}| \leq P_2} |S_{d,\tilde{\mathbf{z}}}(\alpha)| \right)^{2^{d_1-1}}.$$

Par une inégalité de Hölder, on a

$$\left(\sum_{|\tilde{\mathbf{z}}| \leq P_2} |S_{d,\tilde{\mathbf{z}}}(\alpha)| \right)^{2^{d_1-1}} \ll \left(P_2^{d_2(n-m+1)} \right)^{2^{d_1-1}-1} \sum_{|\tilde{\mathbf{z}}| \leq P_2} |S_{d,\tilde{\mathbf{z}}}(\alpha)|^{2^{d_1-1}},$$

et ainsi (23) devient

$$(23) \quad |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\tilde{d}}} \ll (P_1^{r+1})^{2^{\tilde{d}}-2^{d_1-1}} ((dP_1P_2)^{m-r})^{2^{\tilde{d}}-d_22^{d_1-1}} \\ (P_2^{n-m+1})^{2^{\tilde{d}}-d_2} \sum_{|\tilde{\mathbf{z}}| \leq P_2} |S_{d,\tilde{\mathbf{z}}}(\alpha)|^{2^{d_1-1}}.$$

Par ailleurs, en appliquant le procédé de différenciation précédent à $S_{d,\tilde{\mathbf{z}}}(\alpha)$, on obtient :

$$|S_{d,\tilde{\mathbf{z}}}(\alpha)|^{2^{d_1-1}} \ll (P_1^{r+1})^{2^{d_1-1}-d_1} \left((dP_1P_2)^{d_2(m-r)} \right)^{2^{d_1-1}-d_1} \\ \sum_{|\mathbf{x}^{(1)}| \leq P_1} \sum_{|\mathbf{y}^{(1,1)}| \leq dP_1P_2} \cdots \sum_{|\mathbf{y}^{(d_2,1)}| \leq dP_1P_2} \sum_{|\mathbf{x}^{(2)}| \leq P_1} \\ \sum_{|\mathbf{y}^{(1,2)}| \leq dP_1P_2} \cdots \sum_{|\mathbf{x}^{(d_1)}| \leq P_1} \sum_{|\mathbf{y}^{(1,d_1)}| \leq dP_1P_2} \cdots \sum_{|\mathbf{y}^{(d_2,d_1)}| \leq dP_1P_2} \\ e \left(\sum_{i=1,2} \mathcal{F}_{d_1}^{(i)}((\mathbf{x}^{(1)}, (\mathbf{y}^{(j,1)}))_{j \in \{1, \dots, d_2\}}, \dots, (\mathbf{x}^{(d_2)}, (\mathbf{y}^{(j,d_1)}))_{j \in \{1, \dots, d_2\}}) \right. \\ \left. - \mathcal{F}_{d_1-1}^{(i)}((\mathbf{x}^{(1)}, (\mathbf{y}^{(j,1)}))_{j \in \{1, \dots, d_2\}}, \dots, (\mathbf{x}^{(d_1-1)}, (\mathbf{y}^{(j,d_1-1)}))_{j \in \{1, \dots, d_2\}}) \right),$$

où pour $i \in \{1, 2\}$, $\mathcal{F}_k^{(i)}$ désigne la forme de (21) associée à $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) = \alpha F_i(d\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ pour un $\tilde{\mathbf{z}}$ fixé. On remarque que

$$\mathcal{F}_{d_1}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) - \mathcal{F}_{d_1-1}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \\ = \Gamma_d^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) + g_d \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right)$$

où $\Gamma_d^{(1)}$ est une forme linéaire en $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)})_{j \in \{1, \dots, d_2\}}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, d_1\}$, de la forme

$$\alpha \sum_{\mathbf{i}=(i_1, \dots, i_{d_1}) \in I^{d_1}} G_{d, \mathbf{i}}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1}}^{(d_1)}$$

avec

$$I = \{0, 1, \dots, r\} \cup \{(r+1, 1), \dots, (m, 1) \dots (r+1, d_2), \dots, (m, d_2)\},$$

$$(24) \quad u_i^{(j)} = \begin{cases} x_i^{(j)} & \text{si } i \in \{0, 1, \dots, r\} \\ y_k^{(l,j)} & \text{si } i = (k, l) \in \{r+1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d_2\} \end{cases}$$

avec $G_{d, \mathbf{i}}(\tilde{\mathbf{z}}) \in \mathbf{Z}[d, \tilde{\mathbf{z}}]$ symétrique en \mathbf{i} et dont le degré en d est

$$f_{\mathbf{i}} = \text{card}\{k \in \{1, \dots, d_1\} \mid i_k \in \{0, \dots, r\}\}$$

et on peut donc écrire

$$G_{d, \mathbf{i}}(\tilde{\mathbf{z}}) = d^{f_{\mathbf{i}}} G_{\mathbf{i}}(\tilde{\mathbf{z}})$$

avec $G_{\mathbf{i}}(\tilde{\mathbf{z}})$ symétrique en \mathbf{i} .

D'autre part, on remarque que puisque F_2 ne dépendait que de $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, la partie

$$\mathcal{F}_{d_1}^{(2)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) - \mathcal{F}_{d_1-1}^{(2)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right)$$

est en fait un polynôme en $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, (\mathbf{y}^{(j,i)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}$ de la forme

$$\Gamma_d^{(2)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) + h_d \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right)$$

où $\Gamma_d^{(2)}$ est une forme linéaire en $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)})_{j \in \{1, \dots, d_2-1\}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, d_1\}$, de la forme

$$\alpha \sum_{\mathbf{i}=(i_1, \dots, i_{d_1}) \in (I')^{d_1}} H_{d, \mathbf{i}}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1}}^{(d_1)}$$

avec $I' = \{0, 1, \dots, r\} \cup \{(r+1, 1), \dots, (m, 1) \dots (r+1, d_2-1), \dots, (m, d_2-1)\}$. On observe en particulier que $\Gamma_d^{(2)}$ est indépendant de $(\mathbf{y}^{(d_2, i)}, \mathbf{z}^{(d_2)})_{i \in \{1, \dots, d_1\}}$.

En regroupant les résultats obtenus on trouve

$$(25) \quad |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\bar{d}}} \ll (P_1^{r+1})^{2^{\bar{d}}-d_1} ((dP_1P_2)^{m-r})^{2^{\bar{d}}-d_1d_2} \\ (P_2^{n-m+1})^{2^{\bar{d}}-d_2} \sum_{\tilde{\mathbf{z}}} \sum_{(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}}_{j \in \{1, \dots, d_2\}} \left| \sum_{\mathbf{x}^{(d_1)}, \mathbf{y}^{(1,d_1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2, d_1)}} \right. \\ \left. e \left(\Gamma_d^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1\}} \right)_{j \in \{1, \dots, d_2\}} \right) + \Gamma_d^{(2)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1\}} \right)_{j \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) \right|$$

Avant d'aller plus loin, il convient de faire la remarque suivante :

Lemme 3.1. *Remarquons que si l'on avait différencié la forme F en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) puis en $(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{z})$ plutôt qu'en (\mathbf{y}, \mathbf{z}) puis en $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}})$, on aurait obtenu :*

$$(26) \quad |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\bar{d}}} \ll (P_1^{r+1})^{2^{\bar{d}}-d_1} ((dP_1P_2)^{m-r})^{2^{\bar{d}}-d_1d_2} \\ (P_2^{n-m+1})^{2^{\bar{d}}-d_2} \sum_{\tilde{\mathbf{x}}} \sum_{(\mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})}_{i \in \{1, \dots, d_1\}}_{j \in \{1, \dots, d_2-1\}} \left| \sum_{\mathbf{x}^{(d_1)}, \mathbf{y}^{(1,d_1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2, d_1)}} \right. \\ \left. e \left(\Gamma_d^{(1)'} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1\}} \right)_{j \in \{1, \dots, d_2\}} \right) + \Gamma_d^{(2)'} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right)_{j \in \{1, \dots, d_2\}} \right) \right|,$$

avec la propriété $\Gamma_d^{(1)'} = \Gamma_d^{(1)}$.

Démonstration. On pose

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \in \mathbf{N} \\ m_1+m_2=d_1 \\ m_2+m_3=d_2}} \sum_{\substack{\mathbf{i}=\{0, \dots, r\}^{m_1} \\ \mathbf{j}=\{r+1, \dots, m\}^{m_2} \\ \mathbf{k}=\{m+1, \dots, n+1\}^{m_3}}} \alpha_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} x_{i_1} \dots x_{i_{m_1}} y_{j_1} \dots y_{j_{m_2}} z_{k_1} \dots z_{k_{m_3}},$$

(avec $\alpha_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}}$ symétrique en $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). La forme multilinéaire $F_1(d\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ précédente est alors

$$d_2! \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \in \mathbf{N} \\ m_1+m_2=d_1 \\ m_2+m_3=d_2}} d^{m_1} \sum_{\substack{\mathbf{i}=\{0, \dots, r\}^{m_1} \\ \mathbf{j}=\{r+1, \dots, m\}^{m_2} \\ \mathbf{k}=\{m+1, \dots, n+1\}^{m_3}}} \alpha_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} x_{i_1} \dots x_{i_{m_1}} \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{M}(d_2, m_2)} y_{j_1}^{\sigma(1)} \dots y_{j_{m_2}}^{\sigma(m_2)} z_{k_1}^{\sigma(m_2+1)} \dots z_{k_{m_3}}^{\sigma(m_2+m_3)}$$

où $\mathcal{M}(1, \dots, d_2)$ désigne l'ensemble des permutations σ de $\{1, \dots, d_2\}$ telles que $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(m_2)$ et $\sigma(m_2+1) < \sigma(m_2+2) < \dots < \sigma(m_2+m_3) =$

$\sigma(d_2)$. La forme multilinéaire $\Gamma_d^{(1)}$ obtenue en différenciant en $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}})$ est alors

$$d_1!d_2! \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \in \mathbf{N} \\ m_1 + m_2 = d_1 \\ m_2 + m_3 = d_2}} d^{m_1} \sum_{\substack{\mathbf{i} = \{0, \dots, r\}^{m_1} \\ \mathbf{j} = \{r+1, \dots, m\}^{m_2} \\ \mathbf{k} = \{m+1, \dots, n+1\}^{m_3}}} \alpha_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} \sum_{\tau \in \mathcal{M}(d_1, m_1)} \sum_{\sigma \in \mathcal{M}(d_2, m_2)} x_{i_1}^{\tau(1)} \dots x_{i_{m_1}}^{\tau(m_1)} y_{j_1}^{(\sigma(1), \tau(m_1+1))} \dots y_{j_{m_2}}^{(\sigma(m_2), \tau(m_1+m_2))} z_{k_1}^{\sigma(m_2+1)} \dots z_{k_{m_3}}^{\sigma(m_2+m_3)}$$

Il est alors clair que l'on obtient le même résultat en différenciant en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) puis en $(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{z})$. \square

On remarque que, pour $\tilde{\mathbf{z}}$ et $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}$ fixés si l'on note $\Gamma_d = \Gamma_d^{(1)} + \Gamma_d^{(2)}$:

$$(27) \quad \left| \sum_{\mathbf{x}^{(d_1)}, \mathbf{y}^{(1, d_1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2, d_1)}} e \left(\Gamma_d \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right) \right| \\ = \prod_{i \in I} \left| \sum_{u_i^{(d_1)}} e \left(\alpha u_i^{(d_1)} \left(\sum_{\mathbf{i} \in I \mid i_{d_1} = i} G_{d, \mathbf{i}}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)} + \sum_{\mathbf{i}' \in I' \mid i'_{d_1} = i} H_{d, \mathbf{i}'}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i'_1}^{(1)} \dots u_{i'_{d_1-1}}^{(d_1-1)} \right) \right) \right|$$

où la somme sur $u_i^{(d_1)}$ porte sur $u_i^{(d_1)}$ appartenant à un intervalle de taille $O(P_1)$ si $i \in \{0, \dots, r\}$ et de taille $O(dP_1P_2)$ pour

$$i \in \{(r+1, 1), \dots, (m, 1) \dots (r+1, d_2), \dots, (m, d_2)\}.$$

Pour simplifier les notations on pose

$$(28) \quad \gamma_{d, i}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(j, k)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = \sum_{\mathbf{i} \in I^{d_1} \mid i_{d_1} = i} G_{d, \mathbf{i}}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)}$$

$$(29) \quad \gamma_{d, i}^{(2)} \left((\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(j, k)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = \sum_{\mathbf{i}' \in (I')^{d_1} \mid i'_{d_1} = i} H_{d, \mathbf{i}'}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i'_1}^{(1)} \dots u_{i'_{d_1-1}}^{(d_1-1)}$$

où les $u_i^{(j)}$ sont les variables définies par 24, et

$$(30) \quad \gamma_{d, i} = \gamma_{d, i}^{(1)} + \gamma_{d, i}^{(2)}$$

En notant pour tout réel x

$$||x|| = \inf_{m \in \mathbf{Z}} |x - m|,$$

et en considérant la majoration

$$\sum_{m \in I(P) \cap \mathbf{Z}} e(\beta m) \ll \min\{P, ||\beta||^{-1}\}$$

pour tout intervalle $I(P)$ de taille $O(P)$ avec $P \geq 1$, on peut alors majorer (27) par :

$$\prod_{i \in I} \min \left(H_i, \left\| \alpha \gamma_{d,i} \left(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(j,k)}, \mathbf{z}^{(j)} \right)_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right\|^{-1} \right)$$

où

$$H_i = \begin{cases} P_1 & \text{si } i \in \{0, 1, \dots, r\} \\ dP_1 P_2 & \text{si } i = (k, l) \in \{r+1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d_2\} \end{cases}.$$

Pour tout $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (\mathbf{N} \cap [0, H_i])$, et pour $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}$

fixés, on note $\mathcal{A} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, \mathbf{r} \right)$, l'ensemble des éléments $\mathbf{z}^{(d_2)}, \mathbf{y}^{(d_2,1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2, d_1-1)}$ tels que $|\mathbf{z}^{(d_2)}| \leq P_1$, $|\mathbf{y}^{(d_2,k)}| \leq dP_1 P_2$ pour tout $k \in \{1, \dots, d_1-1\}$ et

$$\forall i \in I, \quad r_i H_i^{-1} \leq \left\{ \alpha \gamma_{d,i} \left((\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(j,k)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\} < (r_i + 1) H_i^{-1}$$

et $A \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, \mathbf{r} \right)$ le cardinal de cet ensemble. On a alors l'estimation

(31)

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{z}^{(d_2)}, \mathbf{y}^{(d_2,1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2, d_1-1)}} \left| \sum_{\mathbf{x}^{(d_1)}, \mathbf{y}^{(1, d_1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2, d_1)}} e \left(\Gamma_d \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right) \right| \\ & \ll \sum_{\mathbf{r}} A \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, \mathbf{r} \right) \prod_{i \in I} \min \left(H_i, \max \left(\frac{H_i}{r_i}, \frac{H_i}{H_i - r_i - 1} \right) \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, si

$$\begin{aligned} & (\mathbf{z}^{(d_2)}, (\mathbf{y}^{(d_2,i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}), (\mathbf{z}'^{(d_2)}, (\mathbf{y}'^{(d_2,i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}) \\ & \in \mathcal{A} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, \mathbf{r} \right), \end{aligned}$$

on a alors, pour tout $i \in I$:

$$\begin{aligned} & \gamma_{d,i} \left((\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(j,k)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, \mathbf{z}^{(d_2)}, (\mathbf{y}^{(d_2,k)})_{k \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right) \\ & - \gamma_{d,i} \left((\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(j,k)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, \mathbf{z}'^{(d_2)}, (\mathbf{y}'^{(d_2,k)})_{k \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right) \\ & = \gamma_{d,i}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(j,k)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, \right. \\ & \quad \left. \mathbf{z}^{(d_2)} - \mathbf{z}'^{(d_2)}, (\mathbf{y}^{(d_2,k)} - \mathbf{y}'^{(d_2,k)})_{k \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right) \end{aligned}$$

(car $\gamma_{d,i}^{(2)}$ ne dépend pas de $(\mathbf{z}^{(d_2)}, (\mathbf{y}^{(d_2,k)})_{k \in \{1, \dots, d_1-1\}})$ et $\gamma_{d,i}^{(1)}$ est linéaire en $(\mathbf{z}^{(d_2)}, (\mathbf{y}^{(d_2,i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}})$). En notant $N \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right)$ le cardinal de l'ensemble des $\mathbf{z}^{(d_2)}, \mathbf{y}^{(d_2,1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2,d_1-1)}$ tels que $|\mathbf{z}^{(d_2)}| \leq P_1$, $|\mathbf{y}^{(d_2,j)}| \leq dP_1P_2$ et

$$\forall i \in I, \left\| \alpha \gamma_{d,i}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(j,k)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < H_i^{-1},$$

on a alors

$$A \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, \mathbf{r} \right) \ll N \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right),$$

et donc (31) donne

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{z}^{(d_2)}, \mathbf{y}^{(d_2,1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2,d_1-1)}} \left| \sum_{\mathbf{x}^{(d_1)}, \mathbf{y}^{(1,d_1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2,d_1)}} e \left(\Gamma \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right) \right| \\ & \ll N \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) \sum_{\mathbf{r}} \prod_{i \in I} \min \left(H_i, \max \left(\frac{H_i}{r_i}, \frac{H_i}{H_i - r_i - 1} \right) \right) \\ & \ll N \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) (P_1 \log P_1)^{r+1} (dP_1P_2 \log(dP_1P_2))^{d_2(m-r)} \end{aligned}$$

En résumé, si, pour tous $H_1^{(i)}, H_2^{(i,j)}, H_3^{(j)} \geq 1$ et $B_1, B_2 \geq 1$,

$$M \left(\alpha, (H_1^{(i)}, H_2^{(i,j)}, H_3^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}, B_1^{-1}, B_2^{-1} \right)$$

désigne le cardinal de l'ensemble des $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, j \in \{1, \dots, d_2\}}$ tels que $|\mathbf{x}^{(i)}| \leq H_1^{(i)}, |\mathbf{y}^{(i,j)}| \leq H_2^{(i,j)}, |\mathbf{z}^{(j)}| \leq H_2^{(j)}$ pour tous $(i, j) \in \{1, \dots, d_1-1\} \times \{1, \dots, d_2\}$ et

$$\forall k \in \{0, \dots, r\}, \quad \left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, j \in \{1, \dots, d_2\}} \right) \right\| < B_1^{-1},$$

$$\forall k \in \{r+1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d_2\}, \quad \left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, j \in \{1, \dots, d_2\}} \right) \right\| < B_2^{-1},$$

en reprenant la formule (26), on obtient la majoration (pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit)

$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\bar{d}}} \ll (P_1^{r+1})^{2^{\bar{d}}-(d_1-1)+\varepsilon} ((dP_1P_2)^{m-r})^{2^{\bar{d}}-(d_1-1)d_2+\varepsilon} (P_2^{n-m+1})^{2^{\bar{d}}-d_2} \\ M \left(\alpha, (P_1, dP_1P_2, P_2)_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, j \in \{1, \dots, d_2\}}, P_1^{-1}, (dP_1P_2)^{-1} \right).$$

On en déduit (en sommant sur $N \in \{0, \dots, P_1\}$ et sur les $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \{r+1, \dots, m\}$) le lemme ci-dessous

Lemme 3.2. *Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et pour $\kappa > 0, P > 0$ des réels fixes, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

1. $|S_d(\alpha)| \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\bar{d}}}} P_1^{m+2+\varepsilon} P_2^{n-r+1+\varepsilon} P^{-\kappa},$
- 2.

$$M \left(\alpha, (P_1, dP_1P_2, P_2)_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, j \in \{1, \dots, d_2\}}, P_1^{-1}, (dP_1P_2)^{-1} \right) \\ \gg d^{d_1(r+1)} (P_1^{r+1})^{(d_1-1)} ((dP_1P_2)^{m-r})^{(d_1-1)d_2} (P_2^{n-m+1})^{d_2} P^{-2^{\bar{d}}\kappa}$$

Remarque 3.3. *Si κ est petit, la condition 1 donne une majoration de $|S_d(\alpha)|$ plus grande que la majoration triviale,*

$$|S_d(\alpha)| \ll d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1},$$

c'est pourquoi nous utiliserons uniquement cette majoration pour $P^\kappa > P_1^{d_1} P_2^{d_2}$.

3.2 Géométrie des nombres

Nous allons à présent établir des résultats de géométrie des nombres qui nous seront utiles pour la suite de cette section. Il s'agit en fait de généralisations de [Da, Lemme 12.6] et de [Sch1, Lemme 3.1].

Lemme 3.4. On considère deux entiers $n_1, n_2 > 0$, des réels $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ 1 \leq j \leq n_2}}$ et des formes linéaires

$$\forall i \in \{1, \dots, n_1\}, \forall \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n_2}) \quad L_i(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{i,j} u_j,$$

et

$$\forall j \in \{1, \dots, n_2\}, \forall \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n_1}) \quad L_j^t(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{i,j} u_i.$$

Soient $a_1, \dots, a_{n_2}, b_1, \dots, b_{n_1} > 1$ des réels fixés. Pour tout $0 \leq Z \leq 1$, on note

$$U(Z) = \text{Card} \left\{ (u_1, \dots, u_{n_2}, u_{n_2+1}, \dots, u_{n_2+n_1}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \mid \forall j \in \{1, \dots, n_2\} \right. \\ \left. |u_j| \leq a_j Z \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n_1\} \mid |L_i(u_1, \dots, u_{n_2}) - u_{n_2+i}| \leq b_i^{-1} Z \right\},$$

$$U^t(Z) = \text{Card} \left\{ (u_1, \dots, u_{n_1}, u_{n_1+1}, \dots, u_{n_1+n_2}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \mid \forall i \in \{1, \dots, n_1\} \right. \\ \left. |u_i| \leq b_i Z \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, n_2\} \mid |L_j^t(u_1, \dots, u_{n_1}) - u_{n_1+j}| \leq a_j^{-1} Z \right\}.$$

Si $0 < Z_1 \leq Z_2 \leq 1$, on a alors :

$$U(Z_2) \ll_{n_1, n_2} \max \left(\left(\frac{Z_2}{Z_1} \right)^{n_2} U(Z_1), \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}} \frac{\prod_{j=1}^{n_2} a_j}{\prod_{i=1}^{n_1} b_i} U^t(Z_1) \right).$$

Remarque 3.5. Le lemme 3.1 de [Sch1] présente uniquement le cas où $a_1 = \dots = a_{n_2} = a$ et $b_1 = \dots = b_{n_1} = b$. Cette généralisation aux a_i et b_i distincts permet de donner des estimations du nombre de points dans un réseau dont les coordonnées sont bornées par des bornes distinctes.

Démonstration du lemme 3.4. On considère le réseau Λ de $\mathbf{R}^{n_2+n_1}$ défini comme l'ensemble des points

$$(x_1, \dots, x_{n_2}, x_{n_2+1}, \dots, x_{n_2+n_1}) \in \mathbf{R}^{n_1+n_2}$$

tels qu'il existe

$$(u_1, \dots, u_{n_2}, u_{n_2+1}, \dots, u_{n_2+n_1}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2}$$

tels que

$$\begin{aligned} a_1 x_1 &= u_1, \\ &\vdots \\ a_{n_2} x_{n_2} &= u_{n_2}, \\ b_1^{-1} x_{n_2+1} &= L_1(u_1, \dots, u_{n_2}) + u_{n_2+1}, \\ &\vdots \\ b_{n_1}^{-1} x_{n_2+n_1} &= L_{n_1}(u_1, \dots, u_{n_2}) + u_{n_2+n_1}. \end{aligned}$$

Ce réseau est défini par la matrice (i.e une base de ce réseau est donnée par les colonnes de la matrice)

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & (0) & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ (0) & & a_{n_2}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 \lambda_{1,1} & \cdots & b_1 \lambda_{1,n_2} & b_1 & & (0) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ b_{n_1} \lambda_{n_1,1} & \cdots & b_{n_1} \lambda_{n_1,n_2} & (0) & & b_{n_1} \end{pmatrix}.$$

On remarque que $U(Z)$ est alors le nombre de points $(x_1, \dots, x_{n_1+n_2})$ de Λ tels que $|x_i| \leq Z$ pour tout $i \in \{1, \dots, n_1 + n_2\}$. Par ailleurs,

$$B = (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & (0) & -a_1 \lambda_{1,1} & \cdots & -a_1 \lambda_{n_1,1} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ (0) & & a_{n_2} & -a_{n_2} \lambda_{1,n_2} & \cdots & -a_{n_2} \lambda_{n_1,n_2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_1^{-1} & & (0) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & (0) & & b_{n_1}^{-1} \end{pmatrix}.$$

définit un réseau Ω ayant les mêmes minima successifs que le réseau $\tilde{\Omega}$ défini par la matrice

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_1^{-1} & (0) & 0 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ (0) & & b_{n_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 \lambda_{1,1} & \cdots & a_1 \lambda_{n_1,1} & a_1 & & (0) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n_2} \lambda_{1,n_2} & \cdots & a_{n_2} \lambda_{n_1,n_2} & (0) & & a_{n_2} \end{pmatrix}.$$

On pose $c = \left(\frac{\prod_{j=1}^{n_2} a_j}{\prod_{i=1}^{n_1} b_i} \right)^{\frac{1}{n_1+n_2}}$ et $\Lambda^{\text{nor}} = c\Lambda$, $\Omega^{\text{nor}} = c^{-1}\tilde{\Omega}$ les réseaux normalisés (i.e de déterminant 1) associés à Λ et Ω . Par la démonstration de [Sch1, Lemme 3.1], on a alors

$$U(Z_2) \ll_{n_1, n_2} \max \left(\left(\frac{Z_2}{Z_1} \right)^{n_2} U(Z_1), \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}} c^{n_1+n_2} U^t(Z_1) \right).$$

d'où le résultat. \square

En particulier, lorsque $n_1 = n_2 = n$, $a_i = b_i$ pour tout i et $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$ on obtient le résultat suivant :

Lemme 3.6. Soit $n > 0$ un entier et $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des réels tels que $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$ pour tous i, j , et des formes linéaires

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \quad L_i(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} u_j.$$

Soient $a_1, \dots, a_n > 1$ des réels fixés. Pour tout $0 \leq Z \leq 1$, on note

$$U(Z) = \text{Card} \{ (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n}) \mid \forall j \in \{1, \dots, n\} \mid u_j \leq a_j Z \\ \text{et } \forall i \in \{1, \dots, n\} \mid L_i(u_1, \dots, u_n) - u_{n+i} \leq a_i^{-1} Z \}.$$

On a alors

$$U(Z_2) \leq_n \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right)^n U(Z_1).$$

Revenons à présent à la situation de la section précédente, et considérons, pour $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i,j)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-2\}}_{j \in \{1, \dots, d_2\}}$ fixés les $N = (r+1) + d_2(m-r)$ formes linéaires en $(\mathbf{x}^{(d_1-1)}, \mathbf{y}^{(j, d_1-1)})_{j \in \{1, \dots, d_2\}}$ données par les $\alpha \gamma_{d,k}^{(1)}$ pour $k \in I$. Remarquons que d'après (28) on a pour tout $k \in I$

$$\gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}_{j \in \{1, \dots, d_2\}} \right) = \sum_{\mathbf{i} \in I^{d_1-1}} G_{d,\mathbf{i},k}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)} \\ = \sum_{\mathbf{i} \in I^{d_1-1}} d^{f_{\mathbf{i},k}} G_{\mathbf{i},k}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)}$$

(où $\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(d_2)})$ et les $u_i^{(j)}$ sont donnés par (24)) et donc pour tous $k, l \in I$ le coefficient $\lambda_{k,l}$ en $u_l^{(d_1-1)}$ s'écrit :

$$\lambda_{k,l} = \sum_{\mathbf{i} \in I^{d_1-2}} d^{f_{\mathbf{i},l,k}} G_{\mathbf{i},l,k}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-2}}^{(d_1-2)}$$

et on observe que, puisque les $G_{\mathbf{i}}(\tilde{\mathbf{z}})$ sont symétriques en $\mathbf{i} \in I^{d_1}$.

$$\lambda_{k,l} = \lambda_{l,k}.$$

Pour $P > 0$ fixé, et $\theta \in [0, 1]$ supposés tels que $P^\theta \leq P_1$, on pose $Z_2 = 1$, $Z_1 = (dP_1)^{-1} P^\theta$, $a_k = P_1$ pour tout $k \in I_1 = \{0, \dots, r\}$, et $a_k = dP_1 P_2$ pour $k \in I_2 = \{r+1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d_2\}$ de sorte que (en remarquant que $I = I_1 \cup I_2$) :

$$\begin{array}{llll} \forall k \in I_1, & a_k Z_2 & = & P_1, & a_k Z_1 & = & P^\theta / d \\ \forall k \in I_2, & a_k Z_2 & = & dP_1 P_2, & a_k Z_1 & = & P_2 P^\theta \\ \forall k \in I_1, & a_k^{-1} Z_2 & = & P_1^{-1}, & a_k^{-1} Z_1 & = & d^{-1} P_1^{-2} P^\theta \\ \forall k \in I_2, & a_k^{-1} Z_2 & = & (dP_1 P_2)^{-1}, & a_k^{-1} Z_1 & = & (dP_1)^{-2} P_2^{-1} P^\theta \end{array}$$

En appliquant le lemme 3.6, on obtient

$$U(Z_2) \ll \left(\frac{dP_1}{P^\theta} \right)^{r+1+d_2(m-r)} U(Z_1),$$

avec

$$\begin{aligned} U(Z_2) &= \text{card} \left\{ (\mathbf{x}^{(d_1-1)}, (\mathbf{y}^{(j,d_1-1)})_{j \in \{1, \dots, d_2\}}) \mid |\mathbf{x}^{(d_1-1)}| \leq P_1, |\mathbf{y}^{(j,d_1-1)}| \leq dP_1P_2, \right. \\ &\quad \text{et } \forall k \in I_1, \left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < P_1^{-1}, \\ &\quad \left. \forall k \in I_2, \left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < (dP_1P_2)^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U(Z_1) &= \text{card} \left\{ (\mathbf{x}^{(d_1-1)}, (\mathbf{y}^{(j,d_1-1)})_{j \in \{1, \dots, d_2\}}) \mid |\mathbf{x}^{(d_1-1)}| \leq P^\theta/d, |\mathbf{y}^{(j,d_1-1)}| \leq P^\theta P_2, \right. \\ &\quad \text{et } \forall k \in I_1, \left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < d^{-1}P_1^{-2}P^\theta, \\ &\quad \left. \forall k \in I_2, \left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < d^{-2}P_1^{-2}P_2^{-1}P^\theta \right\}, \end{aligned}$$

En sommant sur les $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i,j)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-2\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} &M \left(\alpha, (B_1^{(i)}, B_2^{(j,i)}, B_3^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}, P_1^{-1}, (dP_1P_2)^{-1} \right) \\ &\ll \left(\frac{dP_1}{P^\theta} \right)^{r+1+d_2(m-r)} M \left(\alpha, (H_1^{(i)}, H_2^{(j,i)}, H_3^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}, d^{-1}P_1^{-2}P^\theta, d^{-2}P_1^{-2}P_2^{-1}P^\theta \right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, d_1-1\}, \quad B_1^{(i)} &= P_1 \\ \forall i \in \{1, \dots, d_1-1\}, \quad B_2^{(j,i)} &= dP_1P_2, \\ B_3^{(j)} &= P_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_1^{(i)} &= \begin{cases} P_1 & \text{si } i \in \{1, \dots, d_1-2\} \\ P^\theta/d & \text{si } i = d_1-1 \end{cases}, \\ H_2^{(j,i)} &= \begin{cases} dP_1P_2 & \text{si } i \in \{1, \dots, d_1-2\} \\ P^\theta P_2 & \text{si } i = d_1-1 \end{cases}, \\ H_3^{(j)} &= P_2. \end{aligned}$$

Par la suite, on applique le lemme de la même manière avec $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \notin \{d_1, d_1-l\}}$ fixés (pour l variant de 1 à $d_1 - 1$), et en considérant les $\alpha \gamma_{d,k}^{(1)}$ comme des formes linéaires en $(\mathbf{x}^{(d_1-l)}, \mathbf{y}^{(j,d_1-l)})_{j \in \{1, \dots, d_2\}}$, et en choisissant $Z_2 = d^{-\frac{(l-1)}{2}} P_1^{-\frac{(l-1)}{2}} P^{\frac{(l-1)\theta}{2}}$, $Z_1 = d^{-\frac{(l+1)}{2}} P_1^{-\frac{(l+1)}{2}} P^{\frac{(l+1)\theta}{2}}$, $a_k = d^{\frac{(l-1)}{2}} P_1^{\frac{(l+1)}{2}} P^{-\frac{(l-1)\theta}{2}}$ pour tout $k \in I_1$, et $a_k = d^{\frac{(l+1)}{2}} P_1^{\frac{(l+1)}{2}} P_2 P^{-\frac{(l-1)\theta}{2}}$ pour $k \in I_2$ de sorte que

$$\begin{aligned} \forall k \in I_1, \quad a_k Z_2 &= P_1, & a_k Z_1 &= P^\theta / d \\ \forall k \in I_2, \quad a_k Z_2 &= d P_1 P_2, & a_k Z_1 &= P_2 P^\theta \\ \forall k \in I_1, \quad a_k^{-1} Z_2 &= d^{-(l-1)} P_1^{-l} P^{(l-1)\theta}, & a_k^{-1} Z_1 &= d^{-(l+1)} P_1^{-(l+1)} P^{l\theta} \\ \forall k \in I_2, \quad a_k^{-1} Z_2 &= d^{-l} P_1^{-l} P_2^{-1} P^{(l-1)\theta}, & a_k^{-1} Z_1 &= d^{-(l+1)} P_1^{-(l+1)} P_2^{-1} P^{l\theta} \end{aligned}$$

On obtient alors (à l'étape l) la majoration :

$$\begin{aligned} M \left(\alpha, (B_1^{(i)}, B_2^{(j,i)}, B_3^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} , d^{-(l-1)} P_1^{-l} P^{(l-1)\theta}, d^{-l} P_1^{-l} P_2^{-1} P^{(l-1)\theta} \right) \\ \ll \left(\frac{d P_1}{P^\theta} \right)^{r+1+d_2(m-r)} M \left(\alpha, (H_1^{(i)}, H_2^{(j,i)}, H_3^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} , d^{-(l+1)} P_1^{-(l+1)} P^{l\theta}, d^{-(l+1)} P_1^{-(l+1)} P_2^{-1} P^{l\theta} \right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} B_1^{(i)} &= \begin{cases} P_1 & \text{si } i \in \{1, \dots, d_1 - l\} \\ P^\theta / d & \text{si } i \in \{d_1 - l + 1, \dots, d_1 - 1\} \end{cases} , \\ B_2^{(j,i)} &= \begin{cases} d P_1 P_2 & \text{si } i \in \{1, \dots, d_1 - l\} \\ P^\theta P_2 & \text{si } i \in \{d_1 - l + 1, \dots, d_1 - 1\} \end{cases} , \\ B_3^{(j)} &= P_2. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_1^{(i)} &= \begin{cases} P_1 & \text{si } i \in \{1, \dots, d_1 - l - 1\} \\ P^\theta / d & \text{si } i \in \{d_1 - l, \dots, d_1 - 1\} \end{cases} , \\ H_2^{(j,i)} &= \begin{cases} d P_1 P_2 & \text{si } i \in \{1, \dots, d_1 - l - 1\} \\ P^\theta P_2 & \text{si } i \in \{d_1 - l, \dots, d_1 - 1\} \end{cases} , \\ H_3^{(j)} &= P_2. \end{aligned}$$

On obtient donc finalement, au rang $l = d_1 - 1$:

$$\begin{aligned} (32) \quad M \left(\alpha, (P_1, d P_1 P_2, P_2)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} , P_1^{-1}, (d P_1 P_2)^{-1} \right) \\ \ll \left(\frac{d P_1}{P^\theta} \right)^{(r+1+d_2(m-r))(d_1-1)} M \left(\alpha, (P^\theta / d, P^\theta P_2, P_2)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} , d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{(d_1-1)\theta} \right). \end{aligned}$$

Nous allons à présent chercher à établir des majorations analogues avec les $n_2 = (m - r)(d_1 - 1) + (n - m + 1)$ -uplets de variables donnés par les $(\mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}$ pour $j \in \{1, \dots, d_2\}$, en considérant toujours les formes linéaires $\alpha \gamma_{d,k}^{(1)}$. Fixons donc $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, j \in \{1, \dots, d_2-1\}}$ vérifiant les $(m - r)$ inégalités données par

$$(33) \quad \left\| \alpha \gamma_{d,(l,d_2)}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}, j \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) \right\| < d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{(d_1-1)\theta}$$

pour $l \in \{r+1, \dots, m\}$ (les formes $\gamma_{d,(l,d_2)}^{(1)}$ ne dépendant pas des $\mathbf{y}^{(d_2,i)}, \mathbf{z}^{(d_2)}$). On considère les variables $(\mathbf{y}^{(d_2,i)}, \mathbf{z}^{(d_2)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}$ et les $n_1 = (r+1) + (d_2 - 1)(m - r)$ formes linéaires $\alpha \gamma_{d,k}^{(1)}$, $k \neq (l, d_2)$ correspondantes. On applique le lemme 3.4 en choisissant $Z_2 = d^{-\frac{d_1}{2}} P_1^{-\frac{d_1}{2}} P_2^{\frac{1}{2}} P^{\frac{(d_1-1)\theta}{2}}$, $Z_1 = d^{-\frac{d_1}{2}} P_1^{-\frac{d_1}{2}} P_2^{-\frac{1}{2}} P^{\frac{(d_1+1)\theta}{2}}$, $a_k = d^{\frac{d_1}{2}} P_1^{\frac{d_1}{2}} P_2^{\frac{1}{2}} P^{-\frac{(d_1-1)\theta}{2}}$ pour tout $k \in J_1 = \{m+1, \dots, n+1\}$, $a_k = d^{\frac{d_1}{2}} P_1^{-\frac{d_1}{2}} P_2^{\frac{1}{2}} P^{-\frac{(d_1-3)\theta}{2}}$ pour $k \in J_2 = \{r+1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d_1 - 1\}$, $b_k = d^{\frac{d_1}{2}-1} P_1^{\frac{d_1}{2}} P_2^{\frac{1}{2}} P^{-\frac{(d_1-1)\theta}{2}}$ pour $k \in I_1 = \{0, \dots, r\}$ et $b_k = d^{\frac{d_1}{2}} P_1^{\frac{d_1}{2}} P_2^{\frac{3}{2}} P^{-\frac{(d_1-1)\theta}{2}}$ pour $k \in I'_2 = \{r+1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d_2 - 1\}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \forall k \in J_1, \quad a_k Z_2 &= P_2, & a_k Z_1 &= P^\theta \\ \forall k \in J_2, \quad a_k Z_2 &= P^\theta P_2, & a_k Z_1 &= P^{2\theta} \\ \forall k \in I_1, \quad b_k^{-1} Z_2 &= d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta}, & b_k^{-1} Z_1 &= d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{d_1\theta} \\ \forall k \in I'_2, \quad b_k^{-1} Z_2 &= d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{(d_1-1)\theta}, & b_k^{-1} Z_1 &= d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-2} P^{d_1\theta} \end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned} \forall k \in J_1, \quad a_k^{-1} Z_1 &= d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{d_1\theta} \\ \forall k \in J_2, \quad a_k^{-1} Z_1 &= d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{(d_1-1)\theta} \\ \forall k \in I_1, \quad b_k Z_1 &= P^\theta / d \\ \forall k \in I'_2, \quad b_k Z_1 &= P_2 P^\theta. \end{aligned}$$

On trouve alors

$$U(Z_2) \ll \max \left(\left(\frac{P_2}{P^\theta} \right)^{n_2} U(Z_1), \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}} \frac{\prod_{k \in J} a_k}{\prod_{k \in I_1 \cup I'_2} b_k} U^t(Z_1) \right),$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}} \frac{\prod_{k \in J} a_k}{\prod_{k \in I_1 \cup I'_2} b_k} &= \frac{\prod_{k \in J} a_k Z_2}{\prod_{k \in I_1 \cup I'_2} b_k Z_1} \\ &= d^{r+1} \frac{P_2^{n_2}}{P^{n_1\theta}} \left(\frac{P^{(d_1-1)(m-r)\theta}}{P_2^{(d_2-1)(m-r)}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(Z_2) &= \text{card} \left\{ ((\mathbf{y}^{(d_2,i)}, \mathbf{z}^{(d_2)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}) \mid |\mathbf{z}^{(d_2)}| \leq P_2, |\mathbf{y}^{(d_2,i)}| \leq P^\theta P_2, \right. \\
\text{et } \forall k \in I_1, \quad &\left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta}, \\
\forall k \in I'_2, \quad &\left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{(d_1-1)\theta} \left. \right\},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
U(Z_1) &= \text{card} \left\{ ((\mathbf{y}^{(d_2,i)}, \mathbf{z}^{(d_2)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}) \mid |\mathbf{z}^{(d_2)}| \leq P^\theta, |\mathbf{y}^{(d_2,i)}| \leq P^{2\theta}, \right. \\
\text{et } \forall k \in I_1, \quad &\left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{d_1\theta}, \\
\forall k \in I'_2, \quad &\left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-2} P^{d_1\theta} \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^t(Z_1) &= \text{card} \left\{ (\mathbf{x}^{(d_1)}, (\mathbf{y}^{(j,d_1)})_{j \in \{1, \dots, d_2-1\}}) \mid |\mathbf{x}^{(d_1)}| \leq P^\theta/d, |\mathbf{y}^{(j,d_1)}| \leq P^\theta P_2, \right. \\
\text{et } \forall k \in J_1, \quad &\left\| \alpha (\gamma_{d,k}^{(1)})^t \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) \right\| < d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{d_1\theta}, \\
\forall k \in J_2, \quad &\left\| \alpha (\gamma_{d,k}^{(1)})^t \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) \right\| < d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{(d_1-1)\theta} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Rappelons que l'on avait :

$$\Gamma_d^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = \sum_{k \in I} \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) u_k^{(d_1)}.$$

Or d'après la remarque 3.1, on a $\Gamma_d^{(1)} = \Gamma_d^{(1)'}$. On pose alors

$$\Gamma_d^{(1)} = \sum_{\substack{k \in I_1 \cup I'_2 \\ l \in J_1 \cup J_2}} \lambda_{k,l} t_l^{(d_2)} u_k^{(d_1)} + \sum_{j=r+1}^m \alpha_j y_j^{(d_1, d_2)},$$

On a alors,

$$\gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = \sum_{l \in J_1 \cup J_2} \lambda_{k,l} t_l^{(d_2)}$$

et

$$(\gamma_{d,l}^{(1)})^t \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) = \sum_{k \in I_1 \cup I'_2} \alpha_{k,l} u_k^{(d_1)}$$

Par conséquent les formes linéaires $(\gamma_{d,k}^{(1)})^t$ sont exactement celles que l'on aurait obtenu en différenciant en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) puis en $(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{z})$ et en sommant ensuite sur chaque $\mathbf{z}^{d_2}, \mathbf{y}^{d_2, d_1}$. En particulier si l'on considère les formes $(\gamma_{d,k}^{(1)})^t \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right)$ comme des formes en $(\mathbf{y}^{j,i}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}$ pour un certain $j \in \{1, \dots, d_2\}$ alors ces formes linéaires vérifient la condition de symétrie du lemme 3.6, et on peut alors appliquer ce lemme comme nous l'avons fait pour les formes en $(\mathbf{y}^{j,i}, \mathbf{x}^{(i)})_{j \in \{1, \dots, d_2-1\}}$, pour finalement obtenir, en posant

$$\begin{aligned}
& M^t \left(\alpha, (H_1^{(i)}, H_2^{(j,i)}, H_3^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, B_1^{-1}, B_2^{-1} \right) \\
&= \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \mid \forall (i, j) \in \{1, \dots, d_1\} \times \{1, \dots, d_2-1\}, \right. \\
&\quad \left. |\mathbf{x}^{(i)}| \leq H_1^{(i)}, |\mathbf{y}^{(j,i)}| \leq H_2^{(j,i)}, |\mathbf{z}^{(j)}| \leq H_2^{(j)} \right. \\
&\quad \left. \text{et } \forall k \in \{r+1, \dots, m\}, \left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) \right\| < B_1^{-1}, \right. \\
&\quad \left. \forall k \in \{m+1, \dots, n+1\} \times \{1, \dots, d_1\}, \left\| \alpha (\gamma_{d,k}^{(1)})^t \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) \right\| < B_2^{-1} \right\},
\end{aligned}$$

et en choisissant

$$\begin{aligned}
H_2^{(j,i)} &= P^\theta P_2 \\
H_1^{(i)} &= P^\theta / d, \\
H_3^{(j)} &= P_2 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\} \\ \text{vérifiant (33)}}} \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}} \frac{\prod_{k \in J} a_k}{\prod_{k \in I_1 \cup I'_2} b_k} U^t(Z_1) \\
& \ll d^{r+1} \frac{P_2^{n_2}}{P^{n_1 \theta}} \left(\frac{P^{(d_1-1)(m-r)\theta}}{P_2^{(d_2-1)(m-r)}} \right) \\
& M^t \left(\alpha, (H_1^{(i)}, H_2^{(j,i)}, H_3^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{d_1 \theta}, d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{(d_1-1)\theta} \right) \\
& \ll d^{r+1} \frac{P_2^{n_2}}{P^{n_1 \theta}} \left(\frac{P^{(d_1-1)(m-r)\theta}}{P_2^{(d_2-1)(m-r)}} \right) \left(\frac{P_2}{P^\theta} \right)^{(n-m+1)(d_2-1)+(m-r)(d_2-1)d_1} \\
& M^t \left(\alpha, (P^\theta/d, P^{2\theta}, P^\theta)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}, d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{\tilde{d}\theta} \right) \\
& = d^{r+1} \frac{P_2^{(n-m+1)d_2+(m-r)(d_1-1)d_2}}{P^{(n_2(d_2-1)+n_1+(d_2-d_1)(m-r))\theta}} \\
& M^t \left(\alpha, (P^\theta/d, P^{2\theta}, P^\theta)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}, d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{\tilde{d}\theta} \right)
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour tous les n_2 -uplets de variables $(\mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}$ pour $j \in \{1, \dots, d_2\}$, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
(34) \quad & M \left(\alpha, (P^\theta/d, P^\theta P_2, P_2)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}, d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-1} P^{(d_1-1)\theta} \right) \\
& \ll \frac{P_2^{d_2 n_2}}{P^{\theta(d_2-1)n_2}} \max \left\{ P^{-n_2 \theta} M \left(\alpha, (P^\theta/d, P^{2\theta}, P^\theta)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}, H_2, H_1 \right), \right. \\
& \left. d^{r+1} P^{-(n_1+(m-r)(d_2-d_1))\theta} M^t \left(\alpha, (P^\theta/d, P^{2\theta}, P^\theta)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, H_1, H_1 \right) \right\}.
\end{aligned}$$

où l'on a noté :

$$\begin{aligned}
H_1 &= d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}, \\
H_2 &= d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}.
\end{aligned}$$

En regroupant le lemme 3.2, et les majorations (32) et (34), on obtient le lemme ci-dessous :

Lemme 3.7. *Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et pour $\kappa > 0$, $P > 0$ des réels fixés, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

$$1. |S_d(\alpha)| \ll_{n,r,m,\varepsilon} d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^d}} P_1^{m+2+\varepsilon} P_2^{n-r+1+\varepsilon} P^{-\kappa},$$

2.

$$M \left(\alpha, (P^\theta/d, P^{2\theta}, P^\theta)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}, H_2, H_1 \right) \\ \gg (P^\theta)^{(d_1-1)(r+1)+2(d_1-1)d_2(m-r)+d_2(n-m+1))} P^{-2\tilde{d}\kappa}$$

3.

$$M^t \left(\alpha, (P^\theta/d, P^{2\theta}, P^\theta)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, H_1, H_1 \right) \\ \gg (P^\theta)^{(d_1(r+1)+2d_1(d_2-1)(m-r)+(d_2-1)(n-m+1))} P^{-2\tilde{d}\kappa}.$$

Considérons à présent un élément $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}$ tel que $|\mathbf{x}^{(i)}| \leq P^\theta/d, |\mathbf{y}^{(j,i)}| \leq P^{2\theta}, |\mathbf{z}^{(j)}| \leq P^\theta,$

$$\left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}$$

pour tout $k \in I_1$ et

$$\left\| \alpha \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \right\| < d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}$$

pour tout $k \in I_2$ et supposons qu'il existe $k_0 \in I$ tel que

$$\alpha \gamma_{d,k_0}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) \neq 0.$$

On pose alors $q = \gamma_{k_0}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right)$. Rappelons que d'après (28), on a la relation :

$$\begin{aligned} \gamma_{d,k_0}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(j,k)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{k \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) &= \sum_{\mathbf{i} \in I^{d_1-1}} G_{d,\mathbf{i},k_0}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)} \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in I^{d_1-1}} d^{f_{\mathbf{i},k_0}} G_{\mathbf{i},k_0}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)} \end{aligned}$$

Par conséquent, si $k_0 \in I_1$ alors d divise q et on a $q \ll dP^{(\tilde{q}+1)\theta}$ (car $|\mathbf{x}^{(i)}| \leq P^\theta/d, |\mathbf{y}^{(j,i)}| \leq P^{2\theta}, |\mathbf{z}^{(j)}| \leq P^\theta$) et si a est l'entier le plus proche de αq , on a donc

$$|\alpha q - a| \leq d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}.$$

Dans le cas où $k_0 \in I_2$ on a $q \ll P^{(\tilde{q}+1)\theta}$ et si a est l'entier le plus proche de αq ,

$$|\alpha q - a| \leq d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}.$$

En procédant de même avec les éléments $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}$ comptés par $M^t \left(\alpha, (P^\theta, P^{2\theta}, P^\theta)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}}, P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta} \right)$, on voit que le lemme 3.7 implique

Lemme 3.8. *Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et pour $\kappa > 0$, $P > 0$ des réels fixés, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

1. $|S_d(\alpha)| \ll_{n,r,m,\varepsilon} d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2\tilde{d}}} P_1^{m+2+\varepsilon} P_2^{n-r+1+\varepsilon} P^{-\kappa}$,
2. Il existe q tel que $d|q$, $0 < q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$ et a tels que $0 \leq a < q$ et

$$|\alpha q - a| \leq d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta},$$

3. Il existe q tel que $0 < q \leq P^{(\tilde{d}+1)\theta}$ et a tels que $0 \leq a < q$, $\text{pgcd}(a, q) = 1$ et

$$|\alpha q - a| \leq d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta},$$

4.

$$\begin{aligned} & \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \mid |\mathbf{x}^{(i)}| \leq P^\theta/d, |\mathbf{y}^{(j,i)}| \leq P^{2\theta}, \right. \\ & \left. |\mathbf{z}^{(j)}| \leq P^\theta \text{ et } \forall k \in I, \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = 0 \right\} \\ & \gg (P^\theta)^{(d_1-1)(r+1)+2(d_1-1)d_2(m-r)+d_2(n-m+1)} P^{-2\tilde{d}\kappa}, \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} & \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \mid |\mathbf{x}^{(i)}| \leq P^\theta/d, |\mathbf{y}^{(j,i)}| \leq P^{2\theta}, \right. \\ & \left. |\mathbf{z}^{(j)}| \leq P^\theta \text{ et } \forall k \in J, (\gamma_{d,k}^{(1)})^t \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2-1\}}} \right) = 0 \right\} \\ & \gg (P^\theta)^{d_1(r+1)+2d_1(d_2-1)(m-r)+(d_2-1)(n-m+1)} P^{-2\tilde{d}\kappa}. \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, nous introduisons le lemme ci-dessous qui sera utile à plusieurs reprise par la suite :

Lemme 3.9. On considère $p, q, r \in \mathbf{N}$ et $(L_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ des formes linéaires à $p + q$ variables. pour des constantes A, B et $(C_i)_{i \in I}$ fixées on note

$$M(A, B, (C_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}) = \text{card} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{Z}^q \mid |\mathbf{x}| \leq A, |\mathbf{y}| \leq B, \\ \forall i \in \{1, \dots, r\}, \|L_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| < C_i\}.$$

On a alors pour tout $\xi \geq 1$:

$$M(A, B, (C_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}) \leq (2\xi)^q M\left(2A, \frac{2B}{\xi}, (2C_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}\right).$$

Démonstration. On subdivise le cube $[-B, B]^q$ en $(2\xi)^q$ cubes de taille B/ξ . Prenons un tel cube \mathcal{C} et considérons

$$E(\mathcal{C}) = \text{card} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{Z}^q \mid |\mathbf{x}| \leq A, \mathbf{y} \in \mathcal{C}, \\ \forall i \in \{1, \dots, r\}, \|L_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq C_i\}.$$

Si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ sont deux points de $E(\mathcal{C})$, on a alors que

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq 2A, \quad |\mathbf{y} - \mathbf{y}'| \leq 2B/\xi$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$:

$$|L_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{y} - \mathbf{y}')| \leq 2C_i.$$

On a donc :

$$E(\mathcal{C}) \leq M\left(2A, \frac{2B}{\xi}, (2C_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}\right)$$

pour tout cube \mathcal{C} . D'où le résultat. \square

Considérons à présent le cas 4. du lemme 3.8. Remarquons avant tout qu'il est facile de voir, en appliquant $d_1 - 1$ fois le lemme 3.9 (avec $L_i = \gamma_{d,i}^{(1)}$ et $C_i = 1/2^{d_1}$) que le cardinal considéré peut être majoré, à une constante multiplicative près, par

$$(35) \quad (P^\theta)^{(d_1-1)d_2(m-r)} \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \mid |\mathbf{x}^{(i)}| \leq 2P^\theta/d, \right. \\ \left. |\mathbf{y}^{(j,i)}| \leq 2P^\theta, |\mathbf{z}^{(j)}| \leq P^\theta \text{ et } \forall k \in I, \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = 0 \right\}$$

Quitte à agrandir θ , nous pouvons remplacer la borne $2P^\theta$ sur $\mathbf{x}^{(i)}$ et $\mathbf{y}^{(j,i)}$ par P^θ . D'autre part, si l'on pose pour tout $k \in I$:

$$\gamma_k^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = \sum_{\mathbf{i} \in I^{d_1-1}} G_{\mathbf{i},k}(\tilde{\mathbf{z}}) u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)},$$

on a alors

$$\gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = d\gamma_k^{(1)} \left((d\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right),$$

pour tout $k \in I_1$, et

$$\gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = \gamma_k^{(1)} \left((d\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right),$$

pour $k \in I_2$. Par conséquent, on a la majoration :

$$(36) \quad \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \mid |\mathbf{x}^{(i)}| \leq P^\theta/d, |\mathbf{y}^{(j,i)}| \leq P^\theta, \right. \\ \left. |\mathbf{z}^{(j)}| \leq P^\theta \text{ et } \forall k \in I, \gamma_{d,k}^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = 0 \right\} \\ \ll \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \mid |\mathbf{x}^{(i)}| \leq P^\theta, |\mathbf{y}^{(j,i)}| \leq P^\theta, \right. \\ \left. |\mathbf{z}^{(j)}| \leq P^\theta \text{ et } \forall k \in I, \gamma_k^{(1)} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \right) = 0 \right\}.$$

On considère la variété affine \mathcal{L}_1 définie par l'ensemble des éléments $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j,i)}, \mathbf{z}^{(j)})_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1-1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}}$ de l'espace affine de dimension $(d_1 - 1)(r + 1) + (d_1 - 1)d_2(m - r) + d_2(n - m + 1)$ vérifiant les équations $\gamma_k^{(1)} = 0$ pour tout $k \in I$. En posant $\kappa = K\theta$, d'après (35), la condition 4. du lemme 3.8 implique (par la démonstration de [Br, Théorème 3.1]) :

$$\dim(\mathcal{L}_1) \geq (d_1 - 1)(r + 1) + (d_1 - 1)d_2(m - r) + d_2(n - m + 1) - 2^{\bar{d}}K.$$

On considère par ailleurs la sous-variété affine V_1^* de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+2}$ définie par les $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+2}$ tels que

$$\forall i \in \{0, \dots, r\}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

$$\forall j \in \{r + 1, \dots, m\}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0.$$

Notons par ailleurs \mathcal{D} le sous-espace de l'espace affine de dimension $(d_1 - 1)(r + 1) + (d_1 - 1)d_2(m - r) + d_2(n - m + 1)$ défini par les $(r + 1)(d_1 - 2) + (m - r)((d_1 - 1)d_2 - 1) + (d_2 - 1)(n - m + 1)$ équations :

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)} = \dots = \mathbf{x}^{(d_1-1)}$$

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \{1, \dots, d_1 - 1\} \times \{1, \dots, d_2\}, \quad \mathbf{y}^{(i,j)} &= \mathbf{y}^{(1,1)}, \\ \mathbf{z}^{(1)} &= \mathbf{z}^{(2)} = \dots = \mathbf{z}^{(d_2)}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{D}) &\geq \dim(\mathcal{L}_1) - ((r+1)(d_1-2) + (m-r)((d_1-1)d_2-1) \\ &\quad + (d_2-1)(n-m+1)) \geq n+2-2^{\tilde{d}}K. \end{aligned}$$

D'autre part, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{D}$ est isomorphe à V_1^* . Donc, en résumé la condition 4. implique

$$\dim(V_1^*) \geq n+2-2^{\tilde{d}}K.$$

De la même manière, en notant V_2^* la sous-variété de \mathbf{A}_C^{n+2} définie par

$$\begin{aligned} \forall i \in \{m+1, \dots, n+1\}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_i} &= 0, \\ \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned}$$

on vérifie que la condition 5. implique

$$\dim(V_2^*) \geq n+2-2^{\tilde{d}}K.$$

Par conséquent, on choisira

$$(37) \quad K = (n+2 - \max\{\dim(V_1^*), \dim(V_2^*)\} - \varepsilon)/2^{\tilde{d}}$$

(pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit) de sorte que les assertions 4. et 5. ne soient plus possibles. On posera par ailleurs

$$(38) \quad P = P_1^{d_1} P_2^{d_2}.$$

Rappelons que l'on considère des réels θ tels que $P^\theta \leq P_2 \leq P_1$, et donc, si $P_1 = P_2^b$, alors $\theta \leq \frac{b}{bd_1+d_2}$. D'autre part, pour un tel θ , pour a, q tels que $0 < q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$, $d|q$ et $0 \leq a < q$, on définit les arcs majeurs

$$(39) \quad \mathfrak{M}_{a,q}^{(1)}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid |\alpha q - a| \leq d^{-(d_1-1)} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \right\},$$

et

$$(40) \quad \mathfrak{M}^{(1)}(\theta) = \bigcup_{\substack{1 \leq q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta} \\ d|q}} \bigcup_{0 \leq a < q} \mathfrak{M}_{a,q}^{(1)}(\theta).$$

De même pour a, q tels que $0 < q \leq P^{(\tilde{d}+1)\theta}$, et $0 \leq a < q$, on définit

$$(41) \quad \mathfrak{M}_{a,q}^{(2)}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid |\alpha q - a| \leq d^{-(d_1-1)} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \right\},$$

et

$$(42) \quad \mathfrak{M}^{(2)}(\theta) = \bigcup_{1 \leq q \leq P^{(\tilde{d}+1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}^{(2)}(\theta).$$

On notera par ailleurs $\mathfrak{m}(\theta) = [0, 1[\setminus (\mathfrak{M}^{(1)}(\theta) \cup \mathfrak{M}^{(2)}(\theta))$ l'ensemble des arcs mineurs. Avec ces notations, le lemme 3.8 devient alors

Lemme 3.10. *Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

1. $|S_d(\alpha)| \ll_{n,m,r,\varepsilon} d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}} P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{-K\theta+\varepsilon},$
2. Le réel α appartient à $\mathfrak{M}(\theta) = \mathfrak{M}^{(1)}(\theta) \cup \mathfrak{M}^{(2)}(\theta).$

Remarque 3.11. *Dans le cas particulier où $d = 1$ on peut considérer les arcs majeurs*

$$\mathfrak{M}_{a,q}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid |\alpha q - a| \leq P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \right\}$$

et le lemme 3.10 peut être exprimé sous la forme suivante :

Lemme 3.12. *Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

1. $|S_1(\alpha)| \ll P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{-K\theta+\varepsilon},$
2. Il existe a, q tels que $1 \leq q \leq P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta}, \text{pgcd}(a, q) = 1, 0 \leq a < q$ et le réel α appartient à $\mathfrak{M}_{a,q}(\theta).$

3.3 Les arcs mineurs

On considère à présent $\delta > 0$ arbitrairement petit, $\theta_0 \leq \frac{b}{bd_1+d_2}$ tels que

$$(43) \quad K - 2(\tilde{d} + 1) > \left(2\delta + \frac{b}{bd_1 + d_2} \right) \theta_0^{-1},$$

$$(44) \quad 1 > (bd_1 + d_2)(5(\tilde{d} + 1)\theta_0 + \delta).$$

Remarque 3.13. *Pour que les conditions (43) et (44) puissent être vérifiées, il est nécessaire d'avoir*

$$K - 2(\tilde{d} + 1) > \frac{b}{bd_1 + d_2} (bd_1 + d_2) 5(\tilde{d} + 1) = 5b(\tilde{d} + 1),$$

Soit encore

$$K > (5b + 2)(\tilde{d} + 1),$$

ce que nous supposons dorénavant.

Avec ces conditions, on a alors le lemme suivant :

Lemme 3.14. *On a la majoration*

$$\int_{\alpha \in \mathfrak{m}(\theta)} |S_d(\alpha)| d\alpha \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2d}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta}.$$

Démonstration. On considère une suite $(\theta_i)_i$ telle que

$$\theta_T > \theta_{T-1} > \dots > \theta_1 > \theta_0,$$

$$\theta_T \leq \frac{1}{bd_1 + d_2}$$

$$\theta_T K > 2\delta + 1 + \frac{b}{bd_1 + d_2},$$

$$\forall i \in \{0, \dots, T-1\}, \quad 2(\tilde{d}+1)(\theta_{i+1} - \theta_i) < \frac{\delta}{2}$$

Un tel choix de θ_T est possible, étant donné que

$$\frac{K}{bd_1 + d_2} > 2\delta + 1 + \frac{b}{bd_1 + d_2} \Leftrightarrow K > (2\delta + 1)(bd_1 + d_2) + b,$$

ce qui est assuré par la condition $K > (5b + 2)(\tilde{d} + 1)$ de la remarque 3.13. Quitte à supposer P assez grand, on suppose de plus que T est tel que $T \ll P^{\frac{\delta}{2}}$. On a alors, d'après le lemme 3.10,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_T)} |S_d(\alpha)| d\alpha &\ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2d}} P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{-K\theta_T+\varepsilon} \\ &\ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2d}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathfrak{M}^{(1)}(\theta_i)) &\ll \sum_{\substack{q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta_i} \\ d|q}} \sum_{0 \leq a < q} \frac{1}{q} d^{-(d_1-1)} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_i} \\ &\ll d^{-(d_1-1)} P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathfrak{M}^{(2)}(\theta_i)) &\ll \sum_{q \leq P^{(\tilde{d}+1)\theta_i}} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \frac{1}{q} d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_i} \\ &\ll d^{-d_1} P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta_i}, \end{aligned}$$

et donc

$$\text{Vol}(\mathfrak{M}(\theta_i)) \ll d^{-(d_1-1)} P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta_i}.$$

On a donc que

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha \in \mathfrak{M}(\theta_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}(\theta_i)} |S_d(\alpha)| d\alpha \\
& \ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}-(d_1-1)} P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta_{i+1}} P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{-K\theta_i+\varepsilon} \\
& \ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}-(d_1-1)} P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{(2(\tilde{d}+1)-K)\theta_i} P^{-1+2(\tilde{d}+1)(\theta_{i+1}-\theta_i)+\varepsilon} \\
& \ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}-(d_1-1)} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-2\delta+2(\tilde{d}+1)(\theta_i-\theta_{i+1})+\varepsilon} \\
& \ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}-(d_1-1)} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\frac{3}{2}\delta}.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en sommant sur tous les i avec $i \in \{0, \dots, T-1\}$ et $T \ll P^{\frac{\delta}{2}}$.

□

Ainsi, l'intégrale de $S(\alpha)$ sur les arcs majeurs donne une contribution négligeable par rapport à $d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1}$. Nous allons à présent nous intéresser à la contribution des arcs majeurs.

3.4 Les arcs majeurs

Pour des raisons pratiques, nous allons introduire de nouveaux arcs majeurs. Pour tout $\theta \in [0, 1]$, $a, q \in \mathbf{Z}$, on pose

$$(45) \quad \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid |\alpha q - a| \leq q d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \right\},$$

$$(46) \quad \mathfrak{M}'(\theta) = \bigcup_{q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta).$$

Remarquons que ce nouvel ensemble $\mathfrak{M}'(\theta)$ contient $\mathfrak{M}(\theta)$. En effet, si $\alpha \in \mathfrak{M}_{a,q}^{(1)}(\theta)$ pour un $d|q$ et $q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$ on a alors $q \geq d$ et

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq q^{-1} d^{-(d_1-1)} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \leq d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta},$$

donc si $\frac{a}{q} = \frac{a'}{q'}$ avec $\text{pgcd}(a', q') = 1$, on a alors $q' \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$ et

$$|\alpha q' - a'| \leq q' d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta},$$

et donc $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$. D'autre part il est immédiat que $\mathfrak{M}^{(2)}(\theta) \subset \mathfrak{M}'(\theta)$.

Par ailleurs, si $\theta_0 \in [0, 1]$ vérifie les conditions (43) et (44), on a le lemme suivant

Lemme 3.15. *Pour $d_1 \geq 2$, les ensembles $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$ sont disjoints deux à deux.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0) \cap \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta_0)$, avec $(a, q) \neq (a', q')$. On a alors (puisque $\text{pgcd}(a, q) = \text{pgcd}(a', q') = 1$) :

$$\frac{1}{qq'} \leq \left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| \leq \left| \frac{a}{q} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{a'}{q'} \right| \leq 2d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta}.$$

On aurait donc

$$1 \leq 2qq'd^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \leq 2d^{2-d_1} P^{-1+3(\tilde{d}+1)\theta} \leq 2P^{-1+3(\tilde{d}+1)\theta},$$

ce qui est absurde car d'après (44),

$$\theta < \frac{1}{5(\tilde{d}+1)(bd_1+d_2)} < \frac{1}{3(\tilde{d}+1)}.$$

□

Puisque $\mathfrak{M}(\theta_0) \subset \mathfrak{M}'(\theta_0)$, le lemme 3.14 implique le résultat suivant :

Lemme 3.16. *On a l'estimation :*

$$\begin{aligned} N_d(P_1, P_2) = & \sum_{1 \leq q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)} S_d(\alpha) d\alpha \\ & + O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2d}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta}\right). \end{aligned}$$

Par la suite, étant donné $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$, on pose $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$, avec $|\beta| \leq d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0}$, et on note :

$$(47) \quad S_{a,q,d} = \sum_{\mathbf{b}_1 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{r+1}} \sum_{\mathbf{b}_2 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}} \sum_{\mathbf{b}_3 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n-m+1}} e\left(\frac{a}{q} F(d\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)\right)$$

et

$$(48) \quad I(\beta) = \int_{\substack{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3 \\ |\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|}} e(\beta F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})) d\mathbf{u} d\mathbf{v} d\mathbf{w}.$$

On établit alors le lemme suivant ;

Lemme 3.17. *Soit $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$. On a alors*

$$\begin{aligned} S_d(\alpha) = & d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} q^{-(n+2)} S_{a,q,d} I(d^{d_1} P \beta) \\ & + O\left(d^{m-r+1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0} P_2^{-1}\right). \end{aligned}$$

Démonstration. On remarque dans un premier temps que

(49)

$$S_d(\alpha) = \sum_{\mathbf{b}_1 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{r+1}} \sum_{\mathbf{b}_2 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}} \sum_{\mathbf{b}_3 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n-m+1}} e\left(\frac{a}{q}F(d\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)\right) S_3(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$$

où

$$S_3(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \equiv \mathbf{b}_1(q) \\ |\mathbf{x}| \leq P_1}} \sum_{\substack{\mathbf{y} \equiv \mathbf{b}_2(q) \\ |\mathbf{y}| \leq d|\mathbf{x}|P_2}} \sum_{\substack{\mathbf{z} \equiv \mathbf{b}_3(q) \\ |\mathbf{z}| \leq P_2}} e(\beta F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

Soient $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ et $(\mathbf{x}'', \mathbf{y}'', \mathbf{z}'')$ tels que

$$(q\mathbf{x}' + \mathbf{b}_1, q\mathbf{y}' + \mathbf{b}_2, q\mathbf{z}' + \mathbf{b}_3) \in P_1\mathcal{B}_1 \times dP_1P_2\mathcal{B}_2 \times P_2\mathcal{B}_3, \\ \text{et } |q\mathbf{y}' + \mathbf{b}_2| \leq d|q\mathbf{x}' + \mathbf{b}_1|P_2,$$

$$(q\mathbf{x}'' + \mathbf{b}_1, q\mathbf{y}'' + \mathbf{b}_2, q\mathbf{z}'' + \mathbf{b}_3) \in P_1\mathcal{B}_1 \times dP_1P_2\mathcal{B}_2 \times P_2\mathcal{B}_3, \\ \text{et } |q\mathbf{y}'' + \mathbf{b}_2| \leq d|q\mathbf{x}'' + \mathbf{b}_1|P_2,$$

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| \leq 2, \quad |\mathbf{y}' - \mathbf{y}''| \leq 2, \quad |\mathbf{z}' - \mathbf{z}''| \leq 2,$$

On a dans ce cas :

$$|F(q\mathbf{x}' + \mathbf{b}_1, q\mathbf{y}' + \mathbf{b}_2, q\mathbf{z}' + \mathbf{b}_3) - F(q\mathbf{x}'' + \mathbf{b}_1, q\mathbf{y}'' + \mathbf{b}_2, q\mathbf{z}'' + \mathbf{b}_3)| \\ \ll qd^{d_1}P_1^{d_1-1}P_2^{d_2} + qd^{d_1}P_1^{d_1-1}P_2^{d_2-1} + qd^{d_1}P_1^{d_1}P_2^{d_2-1} \ll qd^{d_1}P_1^{d_1}P_2^{d_2-1},$$

Remarquons que lorsque $q > P_2$, l'égalité du lemme est triviale. En effet, on a dans ce cas la majoration immédiate :

$$|S_d(\alpha)| \ll d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1} \\ \ll d^{m-r+1}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0}P_2^{-1}$$

car $P_2 < q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}$, et d'autre part :

$$d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}q^{-(n+2)}|S_{a,q,d}|I(d^{d_1}P\beta)| \ll d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1} \\ \ll d^{m-r+1}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0}P_2^{-1}.$$

On suppose donc dorénavant que $P_2 \geq q$. En remplaçant alors S_3 par une intégrale on obtient :

$$S_3(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \int_{|q\tilde{\mathbf{u}}| \leq P_1} \int_{|q\tilde{\mathbf{v}}| \leq d|q\tilde{\mathbf{u}}|P_2} \int_{|q\tilde{\mathbf{w}}| \leq P_2} e(\beta F(dq\tilde{\mathbf{u}}, q\tilde{\mathbf{v}}, q\tilde{\mathbf{w}})) d\tilde{\mathbf{u}}d\tilde{\mathbf{v}}d\tilde{\mathbf{w}} \\ + O\left(q|\beta|d^{d_1}P_1^{d_1}P_2^{(d_2-1)}\left(\frac{P_1}{q}\right)^{r+1}\left(\frac{dP_1P_2}{q}\right)^{m-r}\left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m+1}\right) \\ + O\left(\left(\frac{P_1}{q}\right)^{r+1}\left(\frac{dP_1P_2}{q}\right)^{m-r}\left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m}\right).$$

En rappelant que $|\beta| \leq d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0}$, et en effectuant le changement de variables

$$\mathbf{u} = qP_1^{-1}\tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{v} = q(dP_1P_2)^{-1}\tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{w} = qP_1^{-1}\tilde{\mathbf{w}},$$

on trouve (puisque $P = P_1^{d_1}P_2^{d_2}$).

$$\begin{aligned} S_3(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) &= d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} q^{-(n+2)} \\ &\quad \int_{|\mathbf{u}| \leq 1} \int_{|\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|} \int_{|\mathbf{w}| \leq 1} e(\beta F(dP_1\mathbf{u}, dP_1P_2\mathbf{v}, P_2\mathbf{w})) d\mathbf{u} d\mathbf{v} d\mathbf{w} \\ &+ O \left(\underbrace{q}_{\leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}} |\beta| d^{d_1} P_1^{d_1} P_2^{(d_2-1)} \left(\frac{P_1}{q}\right)^{r+1} \left(\frac{dP_1P_2}{q}\right)^{m-r} \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m+1} \right) \\ &\quad + O \left(\left(\frac{P_1}{q}\right)^{r+1} \left(\frac{dP_1P_2}{q}\right)^{m-r} \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m} \right) \\ &= d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} q^{-(n+2)} I(d^{d_1} P \beta) \\ &\quad + O \left(d^{m-r+1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P_2^{-1} q^{-(n+2)} P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0} \right). \end{aligned}$$

Puis, en remplaçant S_3 par cette expression dans (49), on obtient le résultat. \square

En regroupant les lemmes 3.16 et 3.17, on trouve :

$$\begin{aligned} N_d(P_1, P_2) &= d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} \sum_{1 \leq q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}} q^{-(n+2)} \\ &\quad \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a, q) = 1}} S_{a, q, d} \int_{|\beta| \leq d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0}} I(d^{d_1} P \beta) d\beta \\ &+ O \left(d^{m-r+1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0} P_2^{-1} \text{Vol}(\mathfrak{M}'(\theta_0)) \right) \\ &\quad + O \left(d^{m-r+\varepsilon + \frac{d_1(r+1)}{2\tilde{d}}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta} \right). \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\text{Vol}(\mathfrak{M}'(\theta_0)) \ll \sum_{1 \leq q \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a, q) = 1}} d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0} \ll d^{2-d_1} P^{-1+3(\tilde{d}+1)\theta_0},$$

et que

$$\int_{|\beta| \leq d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0}} I(d^{d_1} P \beta) d\beta = d^{-d_1} P^{-1} \int_{|\beta| \leq P^{(\tilde{d}+1)\theta_0}} I(\beta) d\beta,$$

et en notant

$$(50) \quad \mathfrak{S}_d(Q) = \sum_{1 \leq q \leq Q} q^{-(n+2)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d}$$

et

$$(51) \quad J(\phi) = \int_{|\beta| \leq \phi} I(\beta) d\beta,$$

on a

$$(52) \quad \begin{aligned} N_d(P_1, P_2) &= d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \mathfrak{S}_d(dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}) J(P^{(\tilde{d}+1)\theta_0}) \\ &+ O\left(d^{m-r+3-d_1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1+5(\tilde{d}+1)\theta_0} P_2^{-1}\right) \\ &+ O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2d}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta}\right). \end{aligned}$$

Or, d'après (44) on a supposé $5(\tilde{d}+1)\theta_0 + \delta < \frac{1}{bd_1+d_2}$, donc on obtient :

$$d^{m-r+3-d_1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1+5(\tilde{d}+1)\theta_0} P_2^{-1} \ll d^{m-r+3-d_1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta}.$$

On définit à présent

$$(53) \quad \mathfrak{S}_d = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} q^{-(n+2)} S_{a,q,d},$$

$$(54) \quad J = \int_{\beta \in \mathbf{R}} I(\beta) d\beta.$$

Afin de pouvoir remplacer $J(P^{(\tilde{d}+1)\theta_0})$ par J dans (52), nous allons établir le lemme ci-dessous :

Lemme 3.18. *L'intégrale J est absolument convergente, et on a, pour tout ϕ assez grand :*

$$|J - J(\phi)| \ll \phi^{-1}.$$

Démonstration. On choisit un élément $\theta \in [0, 1]$ vérifiant les mêmes conditions (43) et (44) que θ_0 . Soit β tel que $|\beta| > \phi$, on considère P_1, P_2, P tels que $2|\beta| = P^{(\tilde{d}+1)\theta}$ et on prend $d = 1$. On a alors que $P^{-1}\beta \in \mathfrak{M}_{0,1}(\theta)$, et d'après le lemme 3.17

$$(55) \quad S_1(P^{-1}\beta) = P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} I(\beta) + O\left(P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{2(\tilde{d}+1)\theta} P_2^{-1}\right).$$

D'autre part, $P^{-1}\beta$ appartient au bord de $\mathfrak{M}_{0,1}(\theta)$, donc, puisque les $\mathfrak{M}_{a,q}(\theta)$ sont disjoints, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on a, par le lemme 3.12,

$$(56) \quad S_1(P^{-1}\beta) \ll P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{-K\theta+\varepsilon}.$$

Par conséquent, en regroupant (55) et (56), on trouve :

$$\begin{aligned} |I(\beta)| &\ll P_1 P^{-K\theta+\varepsilon} + O\left(P_2^{-1} P^{2(\tilde{d}+1)\theta}\right) \\ &= P^{\frac{b}{bd_1+d_2}-K\theta+\varepsilon} + O\left(P^{-\frac{1}{bd_1+d_2}+2(\tilde{d}+1)\theta}\right). \end{aligned}$$

Or on a d'après (44) que

$$\frac{1}{bd_1+d_2} - 2(\tilde{d}+1)\theta > 3(\tilde{d}+1)\theta + \delta,$$

donc

$$P^{-\frac{1}{bd_1+d_2}+2(\tilde{d}+1)\theta} \ll P^{-3(\tilde{d}+1)\theta-\delta} \ll |\beta|^{-3}.$$

Par ailleurs, d'après (43), on a

$$K\theta - 2(\tilde{d}+1)\theta > 2\delta + \frac{b}{bd_1+d_2},$$

et donc

$$P^{\frac{b}{bd_1+d_2}-K\theta+\varepsilon} \ll P^{-2(\tilde{d}+1)\theta} \ll |\beta|^{-2}.$$

On en déduit donc

$$\int_{|\beta|>\phi} |I(\beta)| d\beta \ll \phi^{-1}.$$

D'où le résultat du lemme. \square

De même, pour pouvoir remplacer $\mathfrak{S}_d(dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0})$ par \mathfrak{S}_d dans (52), on établit :

Lemme 3.19. *Pour $d_1 \geq 2$, la série \mathfrak{S}_d est absolument convergente, et on a, pour tout $Q \geq d$ assez grand :*

$$|\mathfrak{S}_d - \mathfrak{S}_d(Q)| \ll \max\{d^{d_1(r+1)/2\tilde{d}+\varepsilon}, d\} Q^{-\delta},$$

pour $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. On choisit un élément $\theta \in [0, 1]$ vérifiant les conditions (43) et (44). Soit $q > Q \geq d$ quelconque et a tel que $0 \leq a < q$ et $\text{pgcd}(a, q) = 1$. On choisit $P_1, P_2 \geq 1$ tels que $q = dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$ avec $P = P_1^{d_1} P_2^{d_2}$. D'après le lemme 3.17, si $\alpha = \frac{a}{q}$, on a

$$\begin{aligned} |S_d(\alpha)| &= d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} q^{-(n+2)} S_{a,q,d} I(0) \\ &\quad + O\left(d^{m-r+1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{2(\tilde{d}+1)\theta} P_2^{-1}\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on pose $\theta' = \theta - \nu$ avec $\nu > 0$ arbitrairement petit, on a alors que $\alpha = \frac{a}{q} \notin \mathfrak{M}(\theta')$. En effet, supposons qu'il existe a', q' tels que $d|q'$ $q' \leq dP^{(\tilde{d}+1)\theta'} < dP^{(\tilde{d}+1)\theta} = q$, $0 \leq a' < q'$, et $\alpha \in \mathfrak{M}_{a',q'}^{(1)}(\theta')$. Si $aq' = qa'$, on a donc, puisque $\text{pgcd}(a, q) = 1$, $a|a'$ et donc si $a' \neq 0$ $q' = \frac{a'}{a}q$, ce qui est absurde car $q > q'$, et si $a = a' = 0$, alors $q = 1$ ce qui contredit encore $q > q'$. On a alors

$$1 \leq |aq' - a'q| \leq qd^{-(d_1-1)}P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta'} < d^{2-d_1}P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta}$$

ce qui est absurde car $\theta < \frac{1}{2(\tilde{d}+1)}$ d'après (44). De la même manière, s'il existe a', q' tels que $q' \leq P^{(\tilde{d}+1)\theta'} < dP^{(\tilde{d}+1)\theta} = q$, $0 \leq a' < q'$, $\text{pgcd}(a', q') = 1$ et $\alpha \in \mathfrak{M}_{a',q'}^{(2)}(\theta')$, on a

$$1 \leq |aq' - a'q| \leq qd^{-d_1}P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta'} < d^{1-d_1}P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta}.$$

Par conséquent, d'après le lemme 3.10, on a

$$|S(\alpha)| \ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2\tilde{d}}P_1^{m+2}P_2^{n-r+1}P^{-K\theta'+\varepsilon}$$

et on obtient donc (étant donné que $I(0) \asymp 1$), pour ν assez petit :

$$\begin{aligned} |S_{a,q,d}| &\ll q^{n+2}d^{d_1(r+1)/2\tilde{d}+\varepsilon}P_1P^{-K\theta'+\varepsilon} + \left(dq^{n+2}P^{2(\tilde{d}+1)\theta}P_2^{-1}\right) \\ &\ll d^{d_1(r+1)/2\tilde{d}+\varepsilon}q^{n+2}P^{\frac{b}{bd_1+d_2}-K\theta+2\varepsilon} + \left(dq^{n+2}P^{2(\tilde{d}+1)\theta-\frac{1}{bd_1+d_2}}\right). \end{aligned}$$

Or, par les conditions (43) et (44) on a (pour $\delta = \delta'(\tilde{d}+1)$).

$$\begin{aligned} P^{\frac{b}{bd_1+d_2}-K\theta+2\varepsilon} &\ll P^{-2(\tilde{d}+1)\theta-\delta'(\tilde{d}+1)\theta} = q^{-2-\delta'} \\ P^{2(\tilde{d}+1)\theta-\frac{1}{bd_1+d_2}} &\ll P^{-3(\tilde{d}+1)\theta-\delta} \ll q^{-3}. \end{aligned}$$

On a donc

$$q^{-(n+2)}|S_{a,q,d}| \ll d^{d_1(r+1)/2\tilde{d}+\varepsilon}q^{-2-\delta'} + dq^{-3}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_d - \mathfrak{S}_d(Q)| &\ll \sum_{q>Q} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} q^{-(n+2)}|S_{a,q,d}| \\ &\ll \max\{d^{d_1(r+1)/2\tilde{d}+\varepsilon}, d\} \sum_{q>Q} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} q^{-2-\delta'} \\ &\ll \max\{d^{d_1(r+1)/2\tilde{d}+\varepsilon}, d\} Q^{-\delta'}. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.20. Remarquons que

$$\mathfrak{S}_d(d) \ll d^2,$$

et donc le lemme précédent nous donne une majoration de \mathfrak{S}_d ;

$$|\mathfrak{S}_d| \ll d^2 + \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\bar{d}}+\varepsilon}, d\}d^{-\delta} \ll \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\bar{d}}}, d^2\}.$$

En utilisant les lemmes 3.19 et 3.18, et en notant

$$(57) \quad \sigma_d = d^{m-r-d_1} \mathfrak{S}_d J,$$

on obtient finalement le résultat suivant

Proposition 3.21. Pour, $P_1 = P_2^b$ avec $b \geq 1$, si $d_1 \geq 2$ et si l'on suppose que , $K = (n + 2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} - \varepsilon)/2^{\bar{d}}$ est tel que

$$K > \max\{bd_1 + d_2, (5b + 2)(d_1 + d_2 - 1)\},$$

on a alors

$$\begin{aligned} N_d(P_1, P_2) &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ &\quad + O\left(d^{m-r} \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\bar{d}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right), \end{aligned}$$

pour un réel $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Remarque 3.22. Remarquons que dans le cas où $P_1 \leq P_2$, et $P_2 = P_1^u$, on obtient exactement la même estimation de $N_d(P_1, P_2)$ lorsque

$$K > \max\{d_1 + ud_2, 7(d_1 + d_2 - 1)\}.$$

4 Deuxième étape

Dans cette section nous allons établir, pour un $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^{r+1}$ fixé, en notant $k = |\mathbf{x}|$, une formule asymptotique pour

$$N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = \text{Card} \left\{ (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (dkP_2\mathcal{B}_2 \times P_2\mathcal{B}_3) \cap \mathbf{Z}^{n-r+1} \mid F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\}.$$

À cette fin on pose

$$(58) \quad S_{d,\mathbf{x}}(\alpha) = \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{m-r} \\ |\mathbf{y}| \leq dkP_2}} \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n-m+1} \\ |\mathbf{z}| \leq P_2}} e(\alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})),$$

et on remarque que

$$N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = \int_0^1 S_{d,\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha.$$

4.1 Somme d'exponentielles

En appliquant le même procédé que pour la section 3.1, on a, pour \mathbf{x} fixé :

$$|S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \ll ((dkP_2)^{m-r})^{2^{d_2-1}-d_2} (P_2^{n-m+1})^{2^{d_2-1}-d_2} \\ \sum_{\substack{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)} \\ |\mathbf{y}^{(1)}| \leq dkP_2 \\ |\mathbf{z}^{(1)}| \leq P_2}} \dots \sum_{\substack{\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)} \\ |\mathbf{y}^{(d_2-1)}| \leq dkP_2 \\ |\mathbf{z}^{(d_2-1)}| \leq P_2}} \prod_{j=r+1}^{n+1} \min \left\{ H_j, \left\| \alpha \gamma_{d,\mathbf{x},j} \left((\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) \right\|^{-1} \right\}$$

avec

$$H_j = \begin{cases} dkP_2 & \text{si } j \in \{r+1, \dots, m\} \\ P_2 & \text{si } j \in \{m+1, \dots, n+1\} \end{cases},$$

$$\gamma_{d,\mathbf{x},j} \left((\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) = \sum_{\mathbf{i}=(i_1, \dots, i_{d_2-1}) \in \{r+1, \dots, n+1\}^{d_2-1}} F_{d\mathbf{x}, \mathbf{i}, j} u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_2-1}}^{(d_2-1)},$$

où

$$u_i = \begin{cases} y_i & \text{si } i \in \{r+1, \dots, m\} \\ z_i & \text{si } i \in \{m+1, \dots, n+1\} \end{cases},$$

et les coefficients $F_{d\mathbf{x}, \mathbf{i}, j}$ sont symétriques en $(\mathbf{i}, j) \in \{r+1, \dots, n+1\}^{d_2}$. À partir de là, on montre, comme dans la section 3.1 que

$$|S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \ll ((dkP_2)^{m-r+\varepsilon})^{2^{d_2-1}-d_2+1} (P_2^{n-m+1+\varepsilon})^{2^{d_2-1}-d_2+1} \\ M_{d,\mathbf{x}}(\alpha, dkP_2, P_2, (dkP_2)^{-1}, P_2^{-1}),$$

où l'on a noté pour tous réels strictement positifs H_1, H_2, B_1, B_2 :

$$M_{d,\mathbf{x}}(\alpha, H_1, H_2, B_1^{-1}, B_2^{-1}) = \text{card} \left\{ (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)}) \mid |\mathbf{y}^{(i)}| \leq H_1, \right. \\ \left. |\mathbf{z}^{(i)}| \leq H_2, \text{ et } \forall j \in \{r+1, \dots, m\} \left\| \alpha \gamma_{d,\mathbf{x},j} \left((\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) \right\| \leq B_1^{-1} \right. \\ \left. \forall j \in \{m+1, \dots, n+1\} \left\| \alpha \gamma_{d,\mathbf{x},j} \left((\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) \right\| \leq B_2^{-1} \right\}.$$

On en déduit :

Lemme 4.1. *Si $P > 1$, $\kappa > 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r+\varepsilon} P^{-\kappa},$
2. $M_{d,\mathbf{x}}(\alpha, dkP_2, P_2, (dkP_2)^{-1}, P_2^{-1}) \gg ((dkP_2)^{m-r})^{d_2-1} (P_2^{n-m+1})^{d_2-1} P^{-2^{d_2-1}\kappa}.$

Or pour $(\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-2\}}$ fixés, le réseau défini par les $(\mathbf{y}^{(d_2-1)}, \mathbf{z}^{(d_2-1)})$ et les formes linéaires $\alpha \gamma_{d,\mathbf{x},j}$ est symétrique (i.e. si $\gamma_{d,\mathbf{x},j}(\mathbf{u}) = \sum_{l \in \{r+1, \dots, n+1\}} \lambda_{j,l} u_l$,

alors $\lambda_{j,l} = \lambda_{l,j}$). On peut donc appliquer le lemme 3.6, avec des paramètres a_j, Z, Z' bien choisis.

On pose

$$\begin{aligned} Z &= 1 \\ Z' &= P_2^{-1} P^\theta \\ \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad a_j &= dk P_2 \\ \forall j \in \{m+1, \dots, n+1\}, \quad a_j &= P_2 \end{aligned} \quad ,$$

avec θ tel que $P^\theta \leq P_2$ de sorte que

$$\begin{aligned} \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad a_j Z &= dk P_2 & a_j^{-1} Z &= (k P_2)^{-1} \\ \forall j \in \{m+1, \dots, n+1\}, \quad a_j Z &= P_2 & a_j^{-1} Z &= P_2^{-1} \\ \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad a_j Z' &= dk P^\theta & a_j^{-1} Z' &= (dk)^{-1} P_2^{-2} P^\theta \\ \forall j \in \{m+1, \dots, n+1\}, \quad a_j Z' &= P^\theta & a_j^{-1} Z' &= P_2^{-2} P^\theta \end{aligned}$$

Puis, on réitère ce procédé avec $(\mathbf{y}^{(d_2-i)}, \mathbf{z}^{(d_2-i)})$, pour $i \in \{2, \dots, d_2-1\}$, en choisissant :

$$\begin{aligned} Z &= P_2^{-\frac{(i-1)}{2}} P^{\frac{(i-1)\theta}{2}} \\ Z' &= P_2^{-\frac{(i+1)}{2}} P^{\frac{(i+1)\theta}{2}} \\ \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad a_j &= dk P_2^{\frac{(i+1)}{2}} P^{-\frac{(i-1)\theta}{2}} \\ \forall j \in \{m+1, \dots, n+1\}, \quad a_j &= P_2^{\frac{(i+1)}{2}} P^{-\frac{(i-1)\theta}{2}} \end{aligned} \quad ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad a_j Z &= dk P_2 & a_j^{-1} Z &= (dk)^{-1} P_2^{-i} P^{(i-1)\theta} \\ \forall j \in \{m+1, \dots, n+1\}, \quad a_j Z &= P_2 & a_j^{-1} Z &= P_2^{-i} P^{(i-1)\theta} \\ \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad a_j Z' &= dk P^\theta & a_j^{-1} Z' &= (dk)^{-1} P_2^{-(i+1)} P^{i\theta} \\ \forall j \in \{m+1, \dots, n+1\}, \quad a_j Z' &= P^\theta & a_j^{-1} Z' &= P_2^{-(i+1)} P^{i\theta} \end{aligned} \quad .$$

On obtient alors finalement :

$$\begin{aligned} &M_{d,\mathbf{x}}(\alpha, dk P_2, P_2, (dk P_2)^{-1}, P_2^{-1}) \\ &\ll \left(\frac{P_2}{P^\theta} \right)^{(d_2-1)(n-r+1)} M_{d,\mathbf{x}} \left(\alpha, dk P^\theta, P^\theta, (dk)^{-1} P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}, P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta} \right) \end{aligned}$$

On remarque par ailleurs (en utilisant le lemme 3.9) que

$$\begin{aligned} &M_{d,\mathbf{x}} \left(\alpha, dk P^\theta, P^\theta, (dk)^{-1} P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}, P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta} \right) \\ &\ll (dk)^{(d_2-1)(m-r)} M_{d,\mathbf{x}} \left(\alpha, P^\theta, P^\theta, (dk)^{-1} P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}, P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta} \right) \end{aligned}$$

On a donc le lemme suivant :

Lemme 4.2. *Si $P > 1$, $\kappa > 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r+\varepsilon} P^{-\kappa}$,
- 2.

$$M_{d,\mathbf{x}} \left(\alpha, P^\theta, P^\theta, (dk)^{-1} P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)}, P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)} \right) \gg \left(P^\theta \right)^{(n-r+1)(d_2-1)} P^{-2d_2-1\kappa}.$$

Remarquons à présent que s'il existe $j_0 \in \{r+1, \dots, n+1\}$ tel que $\gamma_{d,\mathbf{x},j_0} \left((\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) \neq 0$ pour un certain $(\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}}$ tel que $|\mathbf{y}^{(i)}| \leq P^\theta$, $|\mathbf{z}^{(i)}| \leq P^\theta$ pour tout $i \in \{1, \dots, d_2-1\}$, et

$$\left| \alpha \gamma_{d,\mathbf{x},j_0} \left((\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) \right| \leq P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta},$$

alors en posant $q = \gamma_{d,\mathbf{x},j_0} \left((\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right)$, on a $q \ll d^{d_1} k^{d_1} P^{(d_2-1)\theta}$ et il existe a tel que

$$|\alpha q - a| \leq P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}.$$

Quitte à changer θ , on peut supposer $q \leq d^{d_1} k^{d_1} P^{(d_2-1)\theta}$, $0 \leq a < q$ et $\text{pgcd}(a, q) = 1$. Dans ce qui suit, on posera

$$(59) \quad \mathfrak{M}_{a,q}^{d,\mathbf{x}}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1[\mid 2|\alpha q - a| \leq P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta} \right\},$$

$$(60) \quad \mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta) = \bigcup_{q \leq d^{d_1} k^{d_1} P^{(d_2-1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}^{d,\mathbf{x}}(\theta).$$

On en déduit donc :

Lemme 4.3. *Si $P > 1$, $\kappa > 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r+\varepsilon} P^{-\kappa}$,
2. le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta)$,
- 3.

$$\begin{aligned} & \text{Card} \left\{ (\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}}, |\mathbf{y}^{(i)}| \leq P^\theta, |\mathbf{z}^{(i)}| \leq P^\theta, \right. \\ & \left. \text{et } \forall j \in \{r+1, \dots, n+1\}, \gamma_{d,\mathbf{x},j} \left((\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) = 0 \right\} \\ & \gg \left(P^\theta \right)^{(n-r+1)(d_2-1)} P^{-2d_2-1\kappa}. \end{aligned}$$

On définit à présent, pour \mathbf{x} fixé :

$$(61) \quad V_{2,\mathbf{x}}^* = \left\{ (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{C}^{n-r+1} \mid \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \frac{\partial F}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right. \\ \left. \text{et } \forall k \in \{m+1, \dots, n+1\}, \frac{\partial F}{\partial z_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\}.$$

Remarquons que, puisque F est homogène de degré d_1 en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , on a pour tous j, k :

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, \mathbf{z}) = d^{d_1-1} \frac{\partial F}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ \frac{\partial F}{\partial z_k}(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, \mathbf{z}) = d^{d_1} \frac{\partial F}{\partial z_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

et donc l'application $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mapsto (d\mathbf{y}, \mathbf{z})$ réalise un isomorphisme de $V_{2,d\mathbf{x}}^*$ sur $V_{2,\mathbf{x}}^*$, donc en particulier :

$$\dim V_{2,d\mathbf{x}}^* = \dim V_{2,\mathbf{x}}^*.$$

On note par ailleurs :

$$(62) \quad \mathcal{A}_2^\lambda = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{C}^{r+1} \mid \dim V_{2,\mathbf{x}}^* < \dim V_2^* - (r+1) + \lambda \},$$

où $\lambda \in \mathbf{N}$ est un paramètre que nous préciserons ultérieurement. Par abus de langage on notera

$$\mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_2^\lambda \cap \mathbf{Z}^{r+1}.$$

Supposons à présent que $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$ et que l'assertion 3. du lemme 4.3 est vérifiée. Posons par ailleurs $K_2 = \kappa/\theta$. Si $\mathcal{L}_{2,d,\mathbf{x}}$ est la sous-variété affine de $\mathbf{A}^{(n-r+1)(d_2-1)}$ définie par les équations

$$\gamma_{d,\mathbf{x},j} \left((\mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) = 0,$$

on a alors, d'après la démonstration de [Br, Théorème 3.1] :

$$\dim \mathcal{L}_{2,d,\mathbf{x}} \geq (n-r+1)(d_2-1) - 2^{d_2-1} K_2.$$

On considère d'autre part l'intersection avec la diagonale

$$\mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}^{(1)} = \dots = \mathbf{y}^{(d_2-1)} \\ \mathbf{z}^{(1)} = \dots = \mathbf{z}^{(d_2-1)} \end{array} \right. .$$

On a

$$\dim(\mathcal{L}_{2,d,\mathbf{x}} \cap \mathcal{D}_2) \geq \dim \mathcal{L}_{2,d,\mathbf{x}} - (n-r+1)(d_2-2) \\ \geq n-r+1 - 2^{d_2-1} K_2$$

On remarque par ailleurs que $\mathcal{L}_{2,d,\mathbf{x}} \cap \mathcal{D}_2$ est isomorphe à $V_{2,d\mathbf{x}}^*$, et donc, puisque $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, et $\dim V_{2,d\mathbf{x}}^* = \dim V_{2,\mathbf{x}}^*$, on obtient

$$2^{d_2-1}K_2 \geq n - r + 1 - \dim V_{2,\mathbf{x}}^* > n + 2 - \dim V_2^* - \lambda.$$

On posera donc dorénavant

$$(63) \quad K_2 = (n + 2 - \dim V_2^* - \lambda)/2^{d_2-1}$$

et le lemme 4.3 devient alors :

Lemme 4.4. *Si $\varepsilon > 0$ est un réel arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r+\varepsilon} P^{-K_2\theta}$,
2. le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta)$.

Pour tout le reste de cette section on fixera $P = P_2$. Avant d'aller plus loin, nous établissons une propriété de l'ensemble \mathcal{A}_2^λ

Proposition 4.5. *L'ensemble \mathcal{A}_2^λ est un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}_\mathbf{C}^{r+1}$, et de plus, on a*

$$\text{Card} \left\{ \mathbf{x} \in [-P_1, P_1]^{r+1} \cap (\mathcal{A}_2^\lambda)^c \cap \mathbf{Z}^{r+1} \right\} \ll P_1^{r+1-\lambda}.$$

Démonstration. On commence par montrer que $\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}_\mathbf{C}^{r+1} \mid \dim V_{2,\mathbf{x}}^* \geq \lambda\}$ est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}_\mathbf{C}^{r+1}$.

Notons Y le fermé de $\mathbf{A}_\mathbf{C}^{r+1} \times \mathbf{P}_\mathbf{C}^{n-r}$ défini par :

$$Y = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{A}_\mathbf{C}^{r+1} \times \mathbf{P}_\mathbf{C}^{n-r} \mid \forall j \in \{m+1, \dots, n+1\}, \frac{\partial F}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right. \\ \left. \text{et } \forall k \in \{m+1, \dots, n+1\}, \frac{\partial F}{\partial z_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\}.$$

La projection canonique

$$\pi : Y \subset \mathbf{A}_\mathbf{C}^{r+1} \times \mathbf{P}_\mathbf{C}^{n-r} \rightarrow \mathbf{A}_\mathbf{C}^{r+1},$$

est un morphisme projectif, donc fermé. Par conséquent, d'après [G-D, Corollaire 13.1.5],

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}_\mathbf{C}^{r+1} \mid \dim Y_{\mathbf{x}} \geq \lambda - 1\}$$

est un fermé, et puisque $\dim Y_{\mathbf{x}} = \dim V_{2,\mathbf{x}}^* - 1$, l'ensemble

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}_\mathbf{C}^{r+1} \mid \dim V_{2,\mathbf{x}}^* \geq \lambda\}$$

est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1}$.

Nous allons à présent montrer que $\dim(\mathcal{A}_2^\lambda)^c \leq r + 1 - \lambda$. On remarque que

$$Y \cap ((\mathcal{A}_2^\lambda)^c \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-r}) = \bigsqcup_{\mathbf{x} \in (\mathcal{A}_2^\lambda)^c} \pi^{-1}(\mathbf{x}).$$

On a alors

$$\dim(\mathcal{A}_2^\lambda)^c + \dim V_2^* - (r + 1) + \lambda - 1 \leq \dim Y = \dim V_2^* - 1,$$

ce qui implique

$$\dim(\mathcal{A}_2^\lambda)^c \leq r + 1 - \lambda,$$

et donc

$$\text{card}\{\mathbf{x} \in [-P_1, P_1]^{r+1} \cap (\mathcal{A}_2^\lambda)^c(\mathbf{Z})\} \ll P_1^{r+1-\lambda}$$

(cf. démonstration de [Br, Théorème 3.1]) □

4.2 Méthode du cercle

On fixe à présent un réel $\theta \in [0, 1]$. On suppose de plus que

$$(64) \quad K_2 > 2(d_2 - 1).$$

On notera

$$(65) \quad \phi(d, k, \theta) = (dk)^{d_1} P_2^{(d_2-1)\theta},$$

$$(66) \quad \Delta_2(\theta, K_2) = \theta(K_2 - 2(d_2 - 1))$$

Nous allons à présent, comme dans la section précédente, séparer l'intégrale sur $[0, 1]$ de $S(\alpha)$ en intégrales sur les arcs majeurs et les arcs mineurs. Commençons par traiter le cas des arcs mineurs.

Lemme 4.6. *Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, on a la majoration :*

$$\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{d, \mathbf{x}}(\theta)} |S_{d, \mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha \ll (dk)^{d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r-d_2-\Delta_2(\theta, K_2)+\varepsilon}.$$

Démonstration. On considère une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$

$$0 < \theta = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{T-1} < \theta_T = 1$$

telle que

$$(67) \quad 2(\theta_{i+1} - \theta_i)(d_2 - 1) < \varepsilon$$

et $T \ll P_2^\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit (et P_2 assez grand). Puisque $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, le lemme 4.4 donne

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta_T)} |S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha &\ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r-K_2\theta_T+\varepsilon} \\ &\ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta)) &\ll \sum_{q \leq \phi(d,k,\theta)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} q^{-1} P_2^{-d_2+(d_2-1)\theta} \\ &\ll (dk)^{d_1} P_2^{-d_2+2(d_2-1)\theta}. \end{aligned}$$

On a alors pour tout $i \in \{0, \dots, T-1\}$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta_i)} |S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha &\ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r-K_2\theta_i+\varepsilon} \text{Vol}(\mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta_{i+1})) \\ &\ll (dk)^{m-r+d_1+\varepsilon} P_2^{n+1-r-K_2\theta_i+\varepsilon-d_2+2(d_2-1)\theta} \end{aligned}$$

Or,

$$2\theta_{i+1}(d_2-1) - K_2\theta_i = 2(\theta_{i+1} - \theta_i)(d_2-1) - \Delta_2(\theta_i, K_2) < \varepsilon - \Delta_2(\theta, K_2)$$

et donc

$$\int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta_i)} |S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha \ll (dk)^{m-r+d_1+\varepsilon} P_2^{n+1-r-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon}$$

et on obtient le résultat souhaité en sommant sur les $i \in \{0, \dots, T-1\}$. \square

On définit à présent la nouvelle famille d'arcs majeurs :

$$(68) \quad \mathfrak{M}_{a,q}'^{d,\mathbf{x}}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1[\mid 2|\alpha q - a| \leq q P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta} \right\},$$

$$(69) \quad \mathfrak{M}'^{d,\mathbf{x}}(\theta) = \bigcup_{q \leq (dk)^{d_1} P^{(d_2-1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}'^{d,\mathbf{x}}(\theta).$$

Lemme 4.7. *Si l'on suppose $(dk)^{2d_1} P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} < 1$, alors les arcs majeurs $\mathfrak{M}_{a,q}'^{d,\mathbf{x}}(\theta)$ sont disjoints deux à deux.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathfrak{M}_{a,q}'^{d,\mathbf{x}}(\theta) \cap \mathfrak{M}_{a',q'}^{d,\mathbf{x}}(\theta)$ pour $(a, q) \neq (a', q')$, $q, q' \leq \phi(d, k, \theta)$, $0 \leq a < q$, $0 \leq a' < q'$ et $\text{pgcd}(a, q) = \text{pgcd}(a', q') = 1$. On a alors

$$\frac{1}{qq'} \leq \left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| \leq P_2^{-d_2+\theta(d_2-1)}$$

et donc

$$1 \leq qq' P_2^{-d_2+\theta(d_2-1)} \leq (dk)^{2d_1} P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)},$$

d'où le résultat. \square

Remarquons que puisque $\mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta) \subset \mathfrak{M}'^{d,\mathbf{x}}(\theta)$, d'après le lemme 4.6, on a le résultat suivant :

Lemme 4.8. *Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, on a alors que :*

$$N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = \sum_{q \leq \phi(d,k,\theta)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)} S(d, \alpha) d\alpha \\ + O\left((dk)^{d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r-d_2-\Delta_2(\theta, K_2)+\varepsilon}\right).$$

On considère à présent $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^{r+1}$ quelconque, et on suppose $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$. On pose $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$ et donc $|\beta| \leq \frac{1}{2} P_2^{-d_2+(d_2-1)\theta}$. On a alors le lemme ci-dessous :

Lemme 4.9. *On a l'estimation*

$$S_{d,\mathbf{x}}(\alpha) = (dk)^{m-r} P_2^{n-r+1} q^{-(n-r+1)} S_{a,q,d}(\mathbf{x}) I_{\mathbf{x}}(d^{d_1} P_2^{d_2} \beta) \\ + O\left((dk)^{2d_1+m-r} P_2^{n-r+2\theta(d_2-1)}\right),$$

avec

$$(70) \quad S_{a,q,d}(\mathbf{x}) = \sum_{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r} \times (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n-m+1}} e\left(\frac{a}{q} F(d\mathbf{x}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)\right),$$

$$(71) \quad I_{\mathbf{x}}(\beta) = \int_{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in [-1,1]^{m-r} \times [-1,1]^{n-m+1}} e(\beta F(\mathbf{x}, k\mathbf{v}, \mathbf{w})) d\mathbf{v} d\mathbf{w}.$$

Démonstration. Lorsque $P_2 > q$, l'égalité est trivialement vérifiée. En effet, dans ce cas, on observe que :

$$|S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r} P_2^{n-r+1} \ll (dk)^{m-r} P_2^{n-r} q \\ \ll (dk)^{2d_1+m-r} P_2^{n-r+2\theta(d_2-1)},$$

et

$$(dk)^{m-r} P_2^{n-r+1} q^{-(n-r+1)} |S_{a,q,d}(\mathbf{x})| |I_{\mathbf{x}}(d^{d_1} P_2^{d_2} \beta)| \\ \ll (dk)^{m-r} P_2^{n-r+1} \ll (dk)^{2d_1+m-r} P_2^{n-r+2\theta(d_2-1)},$$

d'où le résultat. Nous supposons donc dorénavant que $q < P_2$. On peut écrire

$$(72) \quad S_{d,\mathbf{x}}(\alpha) = \sum_{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r} \times (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n-m+1}} e\left(\frac{a}{q} F(d\mathbf{x}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)\right) S_3(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3),$$

où

$$S_3(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \sum_{\substack{\mathbf{y} \equiv \mathbf{b}_2(q) \\ |\mathbf{y}| \leq dkP_2}} \sum_{\substack{\mathbf{z} \equiv \mathbf{b}_3(q) \\ |\mathbf{z}| \leq P_2}} e(\beta F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y})).$$

Si l'on considère $q\mathbf{y}' + \mathbf{b}_2, q\mathbf{y}'' + \mathbf{b}_2 \in [-dkP_2, dkP_2]$ et $q\mathbf{z}' + \mathbf{b}_3, q\mathbf{z}'' + \mathbf{b}_3 \in [-P_2, P_2]$ avec

$$|\mathbf{y}' - \mathbf{y}''| \ll 1, \quad |\mathbf{z}' - \mathbf{z}''| \ll 1,$$

on a

$$|F(d\mathbf{x}, q\mathbf{y}' + \mathbf{b}_2, q\mathbf{z}' + \mathbf{b}_3) - F(d\mathbf{x}, q\mathbf{y}'' + \mathbf{b}_2, q\mathbf{z}'' + \mathbf{b}_3)| \ll q(dk)^{d_1} P_2^{d_2-1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S_3(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) &= \int_{\substack{q\tilde{\mathbf{v}} \in [-dkP_2, dkP_2]^{m-r} \\ q\tilde{\mathbf{w}} \in [-P_2, P_2]^{n-m+1}}} e(\beta F(d\mathbf{x}, q\tilde{\mathbf{v}}, q\tilde{\mathbf{w}})) d\tilde{\mathbf{v}} d\tilde{\mathbf{w}} \\ &+ O\left(q|\beta|(dk)^{d_1} P_2^{d_2-1} \left(\frac{dkP_2}{q}\right)^{m-r} \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m+1}\right) \\ &+ O\left(\left(\frac{dkP_2}{q}\right)^{m-r} \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m}\right). \end{aligned}$$

En rappelant que $|\beta| \leq \frac{1}{2}P_2^{-d_2+(d_2-1)\theta}$, $q \leq \phi(d, k, \theta) = (dk)^{d_1} P^{(d_2-1)\theta}$ et en considérant le changement de variables $q\tilde{\mathbf{v}} = dkP_2\mathbf{v}$, $q\tilde{\mathbf{w}} = P_2\mathbf{w}$ on trouve

$$\begin{aligned} &(dk)^{m-r} P_2^{n-r+1} q^{-(n-r+1)} I_{\mathbf{x}}(d^{d_1} P_2^{d_2} \beta) \\ &+ O\left(q^{-(n-r)} (dk)^{m-r+d_1} P_2^{n-r+(d_2-1)\theta}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant S_3 par cette nouvelle expression dans (72), on obtient le résultat. \square

On pose dorénavant

$$(73) \quad \tilde{\phi}(P_2, \theta) = \frac{1}{2} P_2^{\theta(d_2-1)},$$

$$(74) \quad \eta(\theta) = 1 - 5\theta(d_2 - 1).$$

Lemme 4.10. *Pour $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} N_{d,\mathbf{x}}(P_2) &= (dk)^{m-r} P_2^{n-r+1-d_2} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d, k, \theta)) J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(P_2, \theta)) \\ &+ O\left((dk)^{d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta, K_2)+\varepsilon}\right) + O\left((dk)^{4d_1+m-r} P_2^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)}\right), \end{aligned}$$

où

$$(75) \quad \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d,k,\theta)) = \sum_{q \leq \phi(d,k,\theta)} q^{-(n-r+1)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d}(\mathbf{x}),$$

$$(76) \quad J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(P_2, \theta)) = \int_{|\beta| \leq \tilde{\phi}(\theta)} I_{\mathbf{x}}(d^{d_1} \beta) d\beta.$$

Démonstration. On notera

$$E_1 = (dk)^{d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta, K_2)+\varepsilon},$$

$$E_2 = (dk)^{2d_1+m-r} P_2^{n-r+2\theta(d_2-1)} \text{Vol} \left(\mathfrak{M}'^{d,\mathbf{x}}(\theta) \right).$$

D'après les lemmes 4.9 et 4.8, on a :

$$N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = (dk)^{m-r} P_2^{n-r+1} \sum_{q \leq \phi(d,k,\theta)} q^{-(n-r+1)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d}(\mathbf{x})$$

$$\int_{|\beta| \leq P_2^{-d_2} \tilde{\phi}(P_2, \theta)} I_{\mathbf{x}}(d^{d_1} P_2^{d_2} \beta) d\beta + O(E_1) + O(E_2).$$

Par un changement de variable, on a

$$\int_{|\beta| \leq P_2^{-d_2} \tilde{\phi}(P_2, \theta)} I_{\mathbf{x}}(d^{d_1} P_2^{d_2} \beta) d\beta = P_2^{-d_2} \int_{|\beta| \leq \tilde{\phi}(P_2, \theta)} I_{\mathbf{x}}(d^{d_1} \beta) d\beta$$

$$= P_2^{-d_2} J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(P_2, \theta)).$$

On remarque par ailleurs que

$$\text{Vol} \left(\mathfrak{M}'^{\mathbf{x}}(\theta) \right) \ll \sum_{q \leq \phi(d,k,\theta)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} P_2^{-d_2+(d_2-1)\theta}$$

$$\ll (dk)^{2d_1} P_2^{-d_2+3(d_2-1)\theta},$$

et donc

$$E_2 \ll (dk)^{4d_1+m-r} P_2^{n-r-d_2+5\theta(d_2-1)} = (dk)^{4d_1+m-r} P_2^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)},$$

ce qui clôt la démonstration du lemme. \square

Par la suite, on pose

$$(77) \quad \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-(n-r+1)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q}(\mathbf{x}),$$

$$(78) \quad J_{d,\mathbf{x}} = \int_{\mathbf{R}} I_{\mathbf{x}}(d^{d_1} \beta) d\beta.$$

Lemme 4.11. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. On suppose par ailleurs que $d_2 \geq 2$. L'intégrale $J_{d,\mathbf{x}}$ est absolument convergente, et on a :

$$|J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(P_2, \theta)) - J_{d,\mathbf{x}}| \ll P_2^{\theta((d_2-1)-K_2)} \max\{P_2^\varepsilon, (dk)^\varepsilon\}.$$

On a de plus $|J_{d,\mathbf{x}}| \ll (dk)^\varepsilon$.

Démonstration. On considère β tel que $|\beta| \geq \tilde{\phi}(\theta)$. On choisit alors des paramètres P et θ' tels que

$$(79) \quad |\beta| = \frac{1}{2} P^{\theta'(d_2-1)},$$

$$(80) \quad P^{-K_2\theta'} = P^{-1+2\theta'(d_2-1)}(dk)^{2d_1}.$$

Remarquons que ces deux égalités impliquent

$$(81) \quad \theta' = \frac{\log(2|\beta|)}{(d_2-1) \left(\left(2 + \frac{K_2}{(d_2-1)} \right) \log(2|\beta|) + 2d_1 \log(dk) \right)}$$

donc en particulier

$$(82) \quad \theta' \gg \min \left\{ 1, \frac{\log(2|\beta|)}{\log(dk)} \right\}.$$

Par ailleurs, l'égalité (80) implique

$$P^{-2+4\theta'(d_2-1)}(dk)^{4d_1} < 1,$$

donc, pour $d_2 \geq 2$,

$$P^{-d_2+3\theta'(d_2-1)}(dk)^{2d_1} < 1,$$

et ainsi, d'après le lemme 4.7, les arcs majeurs $\mathfrak{M}_{a,q}^{d,\mathbf{x}}(\theta')$ correspondant à P et θ' sont disjoints deux à deux. Le réel $P^{-d_2}\beta$ appartient au bord de $\mathfrak{M}_{0,1}(\theta')$, et donc par le lemme 4.4, on a l'estimation :

$$|S_{d,\mathbf{x}}(P^{-d_2}\beta)| \ll (dk)^{m-r} P^{n-r+1-K_2\theta'+\varepsilon}.$$

D'autre part, le lemme 4.9 donne :

$$S_{d,\mathbf{x}}(P^{-d_2}\beta) = (dk)^{m-r} P^{n-r+1} I(d^{d_1}\beta) + O\left((dk)^{m-r+2d_1} P^{n-r+2\theta'(d_2-1)}\right).$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} |I(d^{d_1}\beta)| &\ll P^{-K_2\theta'+\varepsilon} + (dk)^{2d_1} P^{-1+2\theta'(d_2-1)} \\ &\ll P^{-K_2\theta'+\varepsilon} \\ &\ll |\beta|^{-\frac{K_2}{(d_2-1)} + \frac{\varepsilon}{\theta'(d_2-1)}}. \end{aligned}$$

Remarquons que, puisque $\theta' \gg \min \left\{ 1, \frac{\log(2|\beta|)}{\log(dk)} \right\}$,

$$|\beta|^{\frac{\varepsilon}{\theta'(d_2-1)}} \ll \max\{|\beta|^{\varepsilon'}, (dk)^{\varepsilon'}\},$$

pour $\varepsilon' > 0$ arbitrairement petit. On a donc

$$\begin{aligned} |J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{d,\mathbf{x}}| &\ll \int_{|\beta| > \phi(\tilde{\theta})} |\beta|^{-\frac{K_2}{(d_2-1)}} \max\{|\beta|^{\varepsilon'}, (dk)^{\varepsilon'}\} d\beta \\ &\ll \tilde{\phi}(\theta)^{1-\frac{K_2}{(d_2-1)}} \max\{\tilde{\phi}(\theta)^{\varepsilon'}, (dk)^{\varepsilon'}\} \\ &\ll P_2^{\theta(d_2-1-K_2)} \max\{P_2^{\varepsilon''}, (dk)^{\varepsilon''}\}, \end{aligned}$$

avec ε'' arbitrairement petit.

D'autre part, en choisissant $P_2 \ll 1$, cette inégalité donne

$$|J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{d,\mathbf{x}}| \ll (dk)^{\varepsilon''},$$

et puisque $|J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(\theta))| \ll 1$ lorsque $P_2 \ll 1$, on a immédiatement

$$|J_{d,\mathbf{x}}| \ll (dk)^{\varepsilon''}$$

□

Lemme 4.12. *Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. On suppose par ailleurs que $d_2 \geq 2$. La série $\mathfrak{S}_{\mathbf{x}}$ est absolument convergente, et on a :*

$$|\mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d, k, \theta)) - \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}| \ll (dk)^{2d_1+\varepsilon} P_2^{\theta(2(d_2-1)-K_2)}.$$

On a de plus $|\mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}| \ll (dk)^{2d_1+\varepsilon}$.

Pour démontrer ce lemme on introduit pour \mathbf{x} fixé et $P \geq 1$ la nouvelle série génératrice :

$$S'_{d,\mathbf{x}}(\alpha) = \sum_{|\mathbf{y}| \leq P} \sum_{|\mathbf{z}| \leq P} e(\alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

De la même manière que pour le lemme 4.4, on établit :

Lemme 4.13. *Si $\varepsilon > 0$ est un réel arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S'_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| \ll P^{n+1-r+\varepsilon-K_2\theta}$,
2. le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta)$.

Démonstration du lemme 4.12. Soit $q > \phi(d, k, \theta)$ et $\alpha = \frac{a}{q}$ avec $0 \leq a < q$ et $\text{pgcd}(a, q) = 1$. On a alors que $S_{a,q,d}(\mathbf{x}) = S'_{d,\mathbf{x}}(\alpha)$ avec $P = q$. On considère θ' tel que $q = (dk)^{d_1} q^{(d_2-1)\theta'}$. Si $\theta'' = \theta' - \nu$ pour $\nu > 0$ arbitrairement petit, on a alors que $\alpha \notin \mathfrak{M}^{d,\mathbf{x}}(\theta'')$. En effet s'il existait $a', q' \in \mathbf{Z}$ tels

que $0 \leq a' < q'$, $\text{pgcd}(a', q') = 1$, $q' \leq (dk)^{d_1} q^{\theta''(d_2-1)} < q$ et $\alpha \in \mathfrak{M}_{a', q'}^{d, \mathbf{x}}(\theta'')$, on aurait alors

$$1 \leq |aq' - a'q| < q^{1-d_2+\theta'(d_2-1)},$$

ce qui est absurde pour $d_2 \geq 2$. On a donc, d'après le lemme précédent :

$$|S_{a,q,d}(\mathbf{x})| \ll q^{n+1-r+\varepsilon-K_2\theta'}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d, k, \theta)) - \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}| &\ll \sum_{q > \phi(d, k, \theta)} q^{-(n-r+1)} \sum_{0 \leq a < q} |S_{a,q,d}(\mathbf{x})| \\ &\ll \sum_{q > \phi(d, k, \theta)} q^{-(n-r+1)} \sum_{0 \leq a < q} q^{n+1-r+\varepsilon-K_2\theta'} \\ &\ll \sum_{q > \phi(d, k, \theta)} q^{-\frac{K_2}{(d_2-1)}+1+\varepsilon} (dk)^{\frac{d_1 K_2}{(d_2-1)}} \\ &\ll (dk)^{\frac{d_1 K_2}{(d_2-1)}} \phi(d, k, \theta)^{-\frac{K_2}{(d_2-1)}+2+\varepsilon} \\ &\ll (dk)^{2d_1+\varepsilon} P_2^{\theta(2(d_2-1)-K_2)+\varepsilon} \end{aligned}$$

Par ailleurs, en prenant $P_2 \ll 1$ cette majoration donne :

$$|\mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d, k, \theta)) - \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}| \ll (dk)^{2d_1+\varepsilon},$$

et en considérant la majoration triviale $|\mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d, k, \theta))| \ll (dk)^{2d_1}$, on trouve finalement

$$|\mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}| \ll (dk)^{2d_1+\varepsilon}.$$

□

On déduit des lemmes 4.12 et 4.11 le résultat suivant :

Lemme 4.14. *Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$. On suppose fixés $\theta \in [0, 1]$ et $P_2 \geq 1$ tels que $(dk)^{2d_1} P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} < 1$. On suppose de plus que $K_2 > 2(d_2 - 1)$. On a alors que*

$$N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}}(dk)^{m-r} P_2^{n-r+1-d_2} + O(E_2) + O(E_3),$$

avec

$$\begin{aligned} E_2 &= (dk)^{4d_1+m-r} P^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)}, \\ E_3 &= (dk)^{2d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta, K_2)+\varepsilon} \end{aligned}$$

et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. Nous avons déjà vu avec le lemme 4.10

$$N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = (dk)^{m-r} P_2^{n-r+1-d_2} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d, k, \theta)) J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) + O(E_1) + O(E_2),$$

où

$$E_1 = (dk)^{d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta, K_2)+\varepsilon} \ll E_3.$$

Par ailleurs, d'après les lemmes 4.12 et 4.11, on a

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d, k, \theta)) J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}} \right| \\ & \leq |\mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d, k, \theta)) - \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}| |J_{d,\mathbf{x}}| + |\mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}}(\phi(d, k, \theta))| |J_{d,\mathbf{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{d,\mathbf{x}}| \\ & \ll (dk)^{2d_1+2\varepsilon} P_2^{\theta(2(d_2-1)-K_2)} + (dk)^{2d_1+\varepsilon} P_2^{\theta((d_2-1)-K_2)} \max\{P_2^\varepsilon, (dk)^\varepsilon\} \end{aligned}$$

et en multipliant cette inégalité par $(dk)^{m-r} P_2^{n-r+1-d_2}$ on obtient un terme d'erreur

$$(dk)^{2d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta, K_2)+\varepsilon} = E_3,$$

d'où le résultat. \square

En fixant $\theta > 0$ tel que $\theta < \frac{1}{5(d_2-1)}$ (de sorte que $\eta(\theta) > 0$), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.15. *Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$. On suppose que $K_2 > 2(d_2 - 1)$. Il existe alors un réel $\delta > 0$ arbitrairement petit tel que :*

$$N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}} (dk)^{m-r} P_2^{n-r+1-d_2} + O\left((dk)^{m-r+4d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right),$$

uniformément pour tout $k < d^{-1} P_2^{\frac{d_2-1}{2d_1}}$.

Remarque 4.16. *La condition d'uniformité $k < d^{-1} P_2^{\frac{d_2-1}{2d_1}}$ découle de la condition $(dk)^{2d_1} P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} < 1$ du lemme 4.14.*

Dans ce qui va suivre, pour $P_2 = P_1^u$, avec $u \geq 1$ on introduit la fonction

$$(83) \quad g_2(u, \delta) = \left(1 - \frac{5d_1}{u} - \delta\right)^{-1} 5(d_2 - 1) \left(\frac{3d_1}{u} + 2\delta\right),$$

ainsi que

$$(84) \quad N_{d,2}(P_1, P_2) = \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}), |\mathbf{x}| \leq P_1, \right. \\ \left. |\mathbf{y}| \leq d|\mathbf{x}|P_2, |\mathbf{z}| \leq P_2, F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\}.$$

On a alors le résultat ci-dessous :

Proposition 4.17. *On suppose $K_2 > 2(d_2 - 1)$, $d_2 \geq 2$, $P_2 = P_1^u$ avec u supposé strictement supérieur à $5d_1$, et de plus que*

$$K_2 - 2(d_2 - 1) > g_2(u, \delta).$$

Alors :

$$N_{d,2}(P_1, P_2) = \left(\sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}} d^{m-r} |\mathbf{x}|^{m-r} \right) P_2^{n-r+1-d_2} + O\left(d^{m-r+5d_1} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right),$$

pour $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. Commençons par démontrer que la propriété est triviale lorsque $d^{2d_1} > P P_2^{-\frac{3}{5}-\delta}$. Dans ce cas on observe que d'une part (en utilisant les lemmes 4.12 et 4.11) :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}} d^{m-r} |\mathbf{x}|^{m-r} \right) P_2^{n-r+1-d_2} \\ & \ll d^{2d_1+2\varepsilon} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ & \ll d^{m-r+5d_1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1-d_2} \underbrace{d^{-2d_1}}_{< P^{-1} P_2^{\frac{3}{5}+\delta}} \\ & \ll d^{m-r+5d_1} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} N_{d,2}(P_1, P_2) & \ll d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} \\ & \ll d^{m-r+5d_1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-\frac{5}{2}} P_2^{\frac{3}{2}+\frac{5\delta}{2}} \\ & \ll d^{m-r+5d_1} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}. \end{aligned}$$

L'égalité du lemme est donc trivialement vérifiée.

Supposons à présent que $d^{2d_1} \leq P P_2^{-\frac{3}{5}-\delta}$. Si θ est tel que

$$(85) \quad d^{2d_1} P_1^{2d_1} P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} < 1,$$

alors d'après le lemme 4.14 :

$$N_{d,2}(P_1, P_2) = \left(\sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}} d^{m-r} |\mathbf{x}|^{m-r} \right) P_2^{n-r+1-d_2} + O(\mathcal{E}_2) + O(\mathcal{E}_3),$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2 &= \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} (d|\mathbf{x}|)^{4d_1+m-r} P_2^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)} \\
&\ll d^{4d_1+m-r} P_1^{4d_1+m+1} P_2^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)} \\
&= d^{4d_1+m-r} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1+\frac{5d_1}{u}-d_2-\eta(\theta)}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_3 &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{x}|=k}} (dk)^{2d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta, K_2)+\varepsilon} \\
&\ll d^{2d_1+m-r+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2+\frac{3d_1}{u}-\Delta_2(\theta, K_2)+2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Rappelons que $\eta(\theta) = 1 - 5\theta(d_2 - 1)$. On choisit alors

$$\theta = \frac{1}{5(d_2 - 1)} \left(1 - \frac{5d_1}{u} - \delta \right),$$

de sorte que d'une part, en utilisant l'inégalité $d^{2d_1} \leq P P_2^{-\frac{3}{5}+\delta}$ on a :

$$d^{2d_2} P_1^{2d_1} P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} = d^{2d_2} P_1^{2d_1} P_2^{-d_2+\frac{3}{5}(1-\frac{5d_1}{u})} = d^{2d_2} P^{-1} P_2^{\frac{3}{5}} \leq P^{-\delta},$$

la condition (85) est donc satisfaite, et on a de plus

$$\frac{5d_1}{u} - \eta(\theta) = -\delta.$$

On a par ailleurs, puisque $K_2 - 2(d_2 - 1) > g_2(u, \delta)$,

$$K_2 - 2(d_2 - 1) > \theta^{-1} \left(\frac{3d_1}{u} + 2\delta \right),$$

et donc

$$\Delta_2(\theta, K_2) - \frac{3d_1}{u} > 2\delta,$$

d'où le résultat. □

4.3 Le cas $d_2 = 1$

Lorsque $d_2 = 1$, on peut obtenir des résultats semblables à ceux des propositions 4.15 et 4.17 en utilisant des résultats de géométrie des réseaux. On introduit la définition suivante issue de [Wi, Definition 2.1] :

Définition 4.18. Soit S un sous-ensemble de \mathbf{R}^n , et soit c un entier tel que $0 \leq c \leq d$. Pour $M \in \mathbf{N}$ et $L > 0$, on dit que S appartient à $\text{Lip}(n, c, M, L)$ s'il existe M applications $\phi : [0, 1]^{n-c} \rightarrow \mathbf{R}^d$ vérifiant :

$$\|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})\|_2 \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2,$$

$\|\cdot\|_2$ désignant la norme euclidienne, telles que S soit recouvert par les images de ces applications.

On a le résultat suivant (cf. [M-V, Lemme 2]) :

Lemme 4.19. Soit $S \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble bordé dont le bord ∂S appartient à $\text{Lip}(n, 1, M, L)$. L'ensemble S est alors mesurable et si Λ est un réseau de \mathbf{R}^n de premier minimum successif λ_1 , on a

$$\left| \text{card}(S \cap \Lambda) - \frac{\text{Vol}(S)}{\det(\Lambda)} \right| \leq c(n)M \left(\frac{L}{\lambda_1} + 1 \right)^{n-1},$$

où $c(n)$ est une constante ne dépendant que de n .

Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$ fixé de norme $|\mathbf{x}| = k$. Puisque $d_2 = 1$ le polynôme $F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ est une forme linéaire en (\mathbf{y}, \mathbf{z}) que l'on peut réécrire

$$F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{j=r+1}^m A_j(d\mathbf{x})y_j + \sum_{j=m+1}^{n+1} B_j(d\mathbf{x})z_j,$$

avec $A_j(d\mathbf{x})$ ou $B_j(d\mathbf{x})$ non tous nuls (car $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$). On note alors $H_{d,\mathbf{x}}$ l'hyperplan de \mathbf{R}^{n-r+1} défini par

$$F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0.$$

On note par ailleurs $C_{d,\mathbf{x}}$ le corps convexe $\mathcal{B}_{d,\mathbf{x}} \cap H_{d,\mathbf{x}}$ où

$$\mathcal{B}_{d,\mathbf{x}} = \{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid |\mathbf{y}| \leq dk, |\mathbf{z}| \leq 1\},$$

et $\Lambda_{d,\mathbf{x}}$ le réseau $\mathbf{Z}^{n-r+1} \cap H_{d,\mathbf{x}}$. Nous allons appliquer le lemme 4.19 à $S = P_2 C_{d,\mathbf{x}}$ et $\Lambda = \Lambda_{d,\mathbf{x}}$ vus respectivement comme un sous-ensemble et un réseau de $H_{d,\mathbf{x}}$ que l'on identifiera à \mathbf{R}^{n-r+1} . Nous allons pour cela montrer que $\partial C_{d,\mathbf{x}} \in \text{Lip}(n-r, 1, 2^{n-r+1}(dk)^{m-r}, (n-r-1)\sqrt{n-r+1})$. Une face du polytope $C_{d,\mathbf{x}}$ est obtenue en prenant l'intersection d'une face \mathcal{F} du polytope $\mathcal{B}_{d,\mathbf{x}}$ avec $H_{d,\mathbf{x}}$. Considérons par exemple l'intersection (supposée non vide) de la face $\mathcal{F} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{B}_{d,\mathbf{x}} \mid z_{n+1} = 1\}$ avec $H_{d,\mathbf{x}}$. Pour simplifier les notations, on pose

$$\begin{cases} \alpha_j = A_j(d\mathbf{x}) & \text{pour } j \in \{r+1, \dots, m\} \\ \beta_j = B_j(d\mathbf{x}) & \text{pour } j \in \{m+1, \dots, n+1\} \end{cases},$$

de sorte que $H_{d,\mathbf{x}}$ a pour équation $\alpha_{r+1}y_{r+1} + \dots + \alpha_m y_m + \beta_{m+1}z_{m+1} + \dots + \beta_{n+1}z_{n+1} = 0$ (les α_k ou les β_k étant non tous nuls). Par ailleurs on

remarque que l'on peut subdiviser $C_{d,\mathbf{x}}$ en une union de $2^{n-m+1}(dk)^{m-r}$ polytopes $C_{d,\mathbf{x},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}}$ plus petits en posant

$$C_{d,\mathbf{x}} = \bigcup_{\mathbf{a}=(a_{r+1},\dots,a_m) \in \{-dk,\dots,dk-1\}^{m-r}} \bigcup_{\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,0\}^{n-m+1}} C_{d,\mathbf{x},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}},$$

$$C_{d,\mathbf{x},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}} = H_{\mathbf{x}} \cap \left(\left(\prod_{j=r+1}^m [a_j, a_j + 1] \right) \times \left(\prod_{j=m+1}^{n+1} [\varepsilon_j, \varepsilon_j + 1] \right) \right).$$

On peut par conséquent subdiviser chaque face $\mathcal{F} \cap H_{d,\mathbf{x}}$ en considérant $\mathcal{F} \cap C_{d,\mathbf{x},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}}$ pour tout $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\varepsilon})$. Pour un couple $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\varepsilon})$ fixé, et pour tout $\mathbf{z} \in \mathcal{F} \cap C_{d,\mathbf{x},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}}$, on a alors

$$\alpha_{r+1}y_{r+1} + \dots + \alpha_my_m + \beta_{m+1}z_{m+1} + \dots + \beta_nz_n + \beta_{n+1} = 0$$

avec $\max\{\max_{r+1 \leq j \leq m} |\alpha_j|, \max_{m+1 \leq j \leq n} |\beta_j|\} \neq 0$ puisque l'intersection $\mathcal{F} \cap H_{d,\mathbf{x}}$ est non vide. Supposons, par exemple, que

$$\max\left\{\max_{r+1 \leq j \leq m} |\alpha_j|, \max_{m+1 \leq j \leq n} |\beta_j|\right\} = |\beta_n|,$$

on a alors $z_n = -\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - \sum_{j=r+1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_n} y_j - \sum_{j=m+1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\beta_n} z_j$, et on peut construire l'application $\phi_{\mathcal{F},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}} : [0, 1]^{n-1} \rightarrow C_{d,\mathbf{x},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}} \subset \mathbf{R}^{n-r+1}$ définie par

$$\phi_{\mathcal{F},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}}(t_{r+1}, \dots, t_{n-1}) = (a_{r+1} + t_{r+1}, \dots, a_m + t_m, \varepsilon_{m+1} + t_{m+1}, \dots, \varepsilon_{n-1} + t_{n-1},$$

$$-\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - \sum_{j=r+1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_n} (a_j + t_j) - \sum_{j=m+1}^{n-1} \frac{\beta_j}{\beta_n} (\varepsilon_j + t_j), 1).$$

On remarque alors que $\mathcal{F} \cap C_{d,\mathbf{x},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}} \cap H_{d,\mathbf{x}} \subset \phi_{\mathcal{F},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}}([0, 1]^{n-1})$ et que

$$\|\phi_{\mathcal{F},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{t}) - \phi_{\mathcal{F},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{t}')\|_2 \leq \sqrt{n-r+1} \|\phi_{\mathcal{F},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{t}) - \phi_{\mathcal{F},\mathbf{a},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{t}')\|_\infty$$

$$\leq \sqrt{n-r+1} \max \left(1, \sum_{j=r+1}^m \frac{|\alpha_j|}{|\beta_n|} + \sum_{j=m+1}^{n-1} \frac{|\beta_j|}{|\beta_n|} \right) \|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|_\infty$$

$$\leq (n-r-1)\sqrt{n-r+1} \|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|_2.$$

On a donc $\partial C_{d,\mathbf{x}} \in \text{Lip}(n-r, 1, 2^{n-r+1}(dk)^{m-r}, (n-r-1)\sqrt{n-r+1})$ et par conséquent

$$\partial P_2 C_{d,\mathbf{x}} \in \text{Lip}(n, 1, 2^{n-r+1}(dk)^{m-r}, (n-r-1)\sqrt{n-r+1} P_2).$$

De plus puisque $\Lambda_{d,\mathbf{x}} \subset \mathbf{Z}^{n-r+1}$ le premier minimum successif de ce réseau est supérieur ou égal à 1. Ainsi, puisque

(86)

$$N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = \{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in P_2 \mathcal{B}_{d,\mathbf{x}} \cap \mathbf{Z}^{n-r+1} \mid F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\} = \text{card}(\Lambda_{d,\mathbf{x}} \cap P_2 C_{d,\mathbf{x}})$$

le lemme 4.19 nous donne un analogue du corollaire 4.15

Lemme 4.20. *On a :*

$$(87) \quad N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = \frac{\text{Vol}(C_{d,\mathbf{x}})}{\det(\Lambda_{d,\mathbf{x}})} P_2^{n-r} + O((dk)^{m-r} P_2^{n-r-1}),$$

uniformément pour tout \mathbf{x} tel que $|\mathbf{x}| = k$.

On déduit alors de ce lemme un résultat analogue à la proposition 4.17 :

Proposition 4.21. *On suppose $d_2 = 1$, $P_2 = P_1^u$ et de plus que $u > d_1$. Alors :*

$$N_{d,2}(P_1, P_2) = \left(\sum_{\mathbf{x} \in P_1 B_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \frac{\text{Vol}(C_{d,\mathbf{x}})}{\det(\Lambda_{d,\mathbf{x}})} \right) P_2^{n-r} + O\left(d^{m-r} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r-\delta}\right),$$

pour un certain $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. D'après le lemme précédent :

$$N_{d,2}(P_1, P_2) = \left(\sum_{\mathbf{x} \in P_1 B_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \frac{\text{Vol}(C_{d,\mathbf{x}})}{\det(\Lambda_{d,\mathbf{x}})} \right) P_2^{n-r} + O(\mathcal{E}),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in P_1 B_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{x}|=k}} (dk)^{m-r} P_2^{n-r-1} \\ &\ll d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r-1} \\ &= d^{m-r} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+\frac{d_1}{u}-1} \\ &\ll d^{m-r} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r-\delta} \end{aligned}$$

car on a supposé $u > d_1$. □

Les résultats des propositions 4.17 et 4.21 se révéleront cruciaux pour donner plus tard des estimations de $N_{d,2}(P_1, P_2)$ indépendamment de u . Mais avant cela, nous allons, dans la section qui va suivre, chercher à établir des résultats analogues à ceux obtenus dans cette section pour \mathbf{z} fixé.

5 Troisième étape

Nous allons à présent chercher à évaluer, pour $l \in \mathbf{N}^*$ fixé la somme

$$\sum_{k \leq P_1} h_d(k, l),$$

où h_d est la fonction définie par (11). On fixe donc

$$l = \max \left(\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor, |\mathbf{z}| \right).$$

Il sera alors nécessaire de distinguer les cas $\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor < |\mathbf{z}|$ et $\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor \geq |\mathbf{z}|$.

5.1 Premier cas

On suppose ici $\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor < |\mathbf{z}| = l$. On choisira donc de fixer \mathbf{z} de norme $|\mathbf{z}| = l$. Plutôt que calculer directement $\sum_{k \leq P_1} h_d(k, l)$, nous allons, dans un premier temps, chercher à évaluer

(88)

$$N_{d,\mathbf{z}}(P_1) = \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^{m+1} \mid |\mathbf{x}| \leq P_1, |\mathbf{y}| < dl|\mathbf{x}|, F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\}.$$

On introduit la série génératrice

$$(89) \quad S_{d,\mathbf{z}}(\alpha) = \sum_{|\mathbf{x}| \leq P_1} \sum_{|\mathbf{y}| \leq dl|\mathbf{x}|} e(\alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

On a alors comme précédemment $N_{d,\mathbf{z}}(P_1) = \int_0^1 S_{d,\mathbf{z}}(\alpha) d\alpha$.

5.1.1 Sommes d'exponentielles

Comme nous l'avons fait dans les sections précédentes, on commence par établir une inégalité de type Weyl. À cette fin, on remarque que

$$|\mathbf{y}| < d|\mathbf{x}|l \Leftrightarrow |\mathbf{x}| > \frac{|\mathbf{y}|}{dl} \Leftrightarrow |\mathbf{x}| \geq \left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{dl} \right\rfloor + 1.$$

On pose alors $N = \left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{dl} \right\rfloor$ (ce qui équivaut à dire que $|\mathbf{y}| \in [d(N-1)l, dNl]$), et on remarque que :

$$S_{d,\mathbf{z}}(\alpha) = \sum_{N=0}^{P_1-1} S_{d,\mathbf{z},N}(\alpha),$$

où

$$(90) \quad S_{d,\mathbf{z},N}(\alpha) = \sum_{N+1 \leq |\mathbf{x}| \leq P_1} \sum_{d(N-1)l \leq |\mathbf{y}| < dNl} e(\alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

Comme dans la section 3.1, étant donné que le polynôme $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ est homogène de degré d_1 en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , on obtient sans difficulté la majoration

$$\begin{aligned} |S_{d,\mathbf{z},N}(\alpha)|^{2^{d_1-1}} &\ll (P_1^{r+1})^{2^{d_1-1}-d_1} ((dlP_1)^{m-r})^{2^{d_1-1}-d_1} \\ &\sum_{\substack{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)} \\ |\mathbf{x}^{(1)}| \leq P_1 \\ |\mathbf{y}^{(1)}| \leq dlP_1}} \dots \sum_{\substack{\mathbf{x}^{(d_1-1)}, \mathbf{y}^{(d_1-1)} \\ |\mathbf{x}^{(d_2-1)}| \leq P_1 \\ |\mathbf{y}^{(d_1-1)}| \leq dlP_1}} \prod_{j=0}^m \min \left\{ H_j, \left\| \alpha \gamma_{d,\mathbf{z},j} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right) \right\|^{-1} \right\} \end{aligned}$$

avec

$$H_j = \begin{cases} P_1 & \text{si } j \in \{0, \dots, r\} \\ dlP_1 & \text{si } j \in \{r+1, \dots, m\}, \end{cases}$$

$$\gamma_{d,z,j} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right) = \sum_{\mathbf{i}=(i_1, \dots, i_{d_1-1}) \in \{0, \dots, m\}^{d_1-1}} F_{d,z,\mathbf{i},j} u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)},$$

où

$$u_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in \{0, \dots, r\} \\ y_i & \text{si } i \in \{r+1, \dots, m\}, \end{cases}$$

et les coefficients $F_{d,z,\mathbf{i},j}$ sont symétriques en $(i_1, \dots, i_{d_1-1}, j) \in \{0, \dots, m\}^{d_2}$.
Remarquons que l'on peut écrire

$$F_{d,z,\mathbf{i},j} = d^{f_{\mathbf{i},j}} F_{\mathbf{z},\mathbf{i},j},$$

avec

$$f_{\mathbf{i},j} = \text{card}\{k \in \{1, \dots, d_1\} \mid i_k \in \{0, \dots, r\}\},$$

(en posant $i_{d_1} = j$). À partir de là, on montre, comme dans la section 3.1 que

$$|S_{d,z,N}(\alpha)|^{2^{d_1-1}} \ll (P_1^{r+1+\varepsilon})^{2^{d_1-1}-d_1+1} ((dlP_1)^{m-r+\varepsilon})^{2^{d_1-1}-d_1+1} M_{d,z}(\alpha, P_1, dlP_1, P_1^{-1}, (dlP_1)^{-1}),$$

où pour tous réels strictement positifs H_1, H_2, B_1, B_2 :

$$\begin{aligned} (91) \quad & M_{d,z}(\alpha, H_1, H_2, B_1^{-1}, B_2^{-1}) \\ &= \text{card} \left\{ (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(d_1-1)}, \mathbf{y}^{(d_2-1)}) \mid \forall i \in \{1, \dots, d_1-1\} \mid |\mathbf{x}^{(i)}| \leq H_1, \right. \\ & \quad \left. |\mathbf{y}^{(i)}| \leq H_2, \text{ et } \forall j \in \{0, \dots, r\} \mid \left| \alpha \gamma_{d,z,j} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-1\}} \right) \right| \leq B_1^{-1}, \right. \\ & \quad \left. \text{et } \forall j \in \{r+1, \dots, m\} \mid \left| \alpha \gamma_{z,j} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right) \right| \leq B_2^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

On en déduit, en sommant sur N , le lemme ci-dessous :

Lemme 5.1. *Pour tous $P > 1$, $\kappa > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,z}(\alpha)| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} P_1^{m+2+\varepsilon} (dl)^{m-r+\varepsilon} P^{-\kappa},$
- 2.

$$\begin{aligned} & M_{d,z}(\alpha, P_1, dlP_1, P_1^{-1}, (dlP_1)^{-1}) \\ & \gg d^{(d_1-1)(r+1)} (P_1^{r+1})^{d_1-1} ((dlP_1)^{m-r})^{d_1-1} P^{-2^{d_1-1}\kappa}. \end{aligned}$$

On fixe alors $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_2-2\}}$ et on applique le lemme 3.6 avec les variables $\mathbf{x}^{(d_1-1)}, \mathbf{y}^{(d_1-1)}$ et les formes linéaires $\alpha \gamma_{d,z,j}$ pour $j \in \{0, \dots, m\}$, et en choisissant : $Z_2 = 1$, $Z_1 = d^{-1} P_1^{-1} P^\theta$, $a_j = P_1$ pour tout $j \in \{0, \dots, r\}$, et $a_j = dl P_1$ pour $j \in \{r+1, \dots, m\}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \forall j \in \{0, \dots, r\}, \quad a_j Z_2 &= P_1, & a_j Z_1 &= P^\theta/d \\ \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad a_j Z_2 &= dl P_1, & a_j Z_1 &= l P^\theta \\ \forall j \in \{0, \dots, m\}, \quad a_j^{-1} Z_2 &= P_1^{-1}, & a_j^{-1} Z_1 &= d^{-1} P_1^{-2} P^\theta \\ \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad a_j^{-1} Z_2 &= (dl P_1)^{-1}, & a_j^{-1} Z_1 &= d^{-2} P_1^{-2} l^{-1} P^\theta \end{aligned}$$

avec $P > 0$ fixé, et $\theta \in [0, 1]$ tels que $P^\theta \leq P_1$. En appliquant ce procédé aux autres familles de variables $\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)}$, on obtient finalement la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & M_{d,z}(\alpha, P_1, dl P_1, P_1^{-1}, (dl P_1)^{-1}) \\ & \ll \left(\frac{d P_1}{P^\theta} \right)^{(d_1-1)(m+1)} M_{d,z} \left(\alpha, P^\theta/d, l P^\theta, d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1} l^{-1} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta} \right) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.9, on a par ailleurs que

$$\begin{aligned} & M_{d,z} \left(\alpha, P^\theta/d, l P^\theta, d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1} l^{-1} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta} \right) \\ & \ll l^{(d_1-1)(m-r)} M_{d,z} \left(\alpha, P^\theta/d, P^\theta, d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1} l^{-1} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta} \right) \end{aligned}$$

On a donc le lemme suivant :

Lemme 5.2. *Pour tous $P > 1$, $\kappa > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,z}(\alpha)| \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2+\varepsilon} P^{-\kappa},$
- 2.

$$\begin{aligned} & M_{d,z} \left(\alpha, P^\theta/d, P^\theta, d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta} \right) \\ & \gg \left(P^\theta \right)^{(m+1)(d_1-1)} P^{-2d_1-1\kappa}. \end{aligned}$$

On introduit à présent les nouvelles familles d'arcs majeurs

$$(92) \quad \mathfrak{M}_{a,q}^{(1),z}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1[\mid 2|\alpha q - a| \leq d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta} \right\},$$

$$(93) \quad \mathfrak{M}^{(1),z}(\theta) = \bigcup_{\substack{q \leq dl^{d_2} P^{(d_1-1)\theta} \\ d|q}} \bigcup_{0 \leq a < q} \mathfrak{M}_{a,q}^{(1),z}(\theta).$$

$$(94) \quad \mathfrak{M}_{a,q}^{(2),z}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1[\mid 2|\alpha q - a| \leq d^{-d_1} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta} \right\},$$

$$(95) \quad \mathfrak{M}^{(2),z}(\theta) = \bigcup_{q \leq l^{d_2} P^{(d_1-1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}^{(2),z}(\theta).$$

$$(96) \quad \mathfrak{M}^z(\theta) = \mathfrak{M}^{(1),z}(\theta) \cup \mathfrak{M}^{(2),z}(\theta)$$

On a alors comme dans les sections précédente :

Lemme 5.3. *Si $P > 1$, $\kappa > 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,z}(\alpha)| \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2+\varepsilon} P^{-\kappa},$
2. le réel α appartient à $\mathfrak{M}^z(\theta),$
- 3.

$$\begin{aligned} & \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}, |\mathbf{x}^{(i)}| \leq P^\theta/d, |\mathbf{y}^{(i)}| \leq P^\theta, \right. \\ & \quad \left. \text{et } \forall j \in \{r+1, \dots, n+1\}, \gamma_{d,z,j} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right) = 0 \right\} \\ & \qquad \qquad \qquad \gg \left(P^\theta \right)^{(m+1)(d_1-1)} P^{-2^{d_1-1}\kappa}. \end{aligned}$$

Pour un \mathbf{z} fixé, on définit à présent :

$$(97) \quad V_{1,z}^* = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}^{m+1} \mid \forall i \in \{0, \dots, r\}, \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right. \\ \left. \text{et } \forall j \in \{r+1, \dots, m\}, \frac{\partial F}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\}.$$

On note par ailleurs :

$$(98) \quad \mathcal{A}_1^\mu = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbf{C}^{n-m+1} \mid \dim V_{1,z}^* < \dim V_1^* - (n-m+1) + \mu \right\},$$

où $\mu \in \mathbf{N}$ est un paramètre que nous préciserons ultérieurement. Par abus de langage on note

$$\mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_1^\mu \cap \mathbf{Z}^{n-m+1}.$$

On a alors une propriété analogue à la proposition 4.5

Proposition 5.4. *L'ensemble \mathcal{A}_1^μ est un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n-m+1}$, et de plus, on a que*

$$\text{Card} \left\{ \mathbf{z} \in [-P_2, P_2]^{n-m+1} \cap (\mathcal{A}_1^\mu)^c \cap \mathbf{Z}^{n-m+1} \right\} \ll P_2^{n-m+1-\mu}.$$

On commence par remarquer que le cardinal de la condition 3 peut être majoré par

$$\text{Card} \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}}, |\mathbf{x}^{(i)}| \leq P^\theta, |\mathbf{y}^{(i)}| \leq P^\theta, \right. \\ \left. \text{et } \forall j \in \{r+1, \dots, n+1\}, \gamma_{\mathbf{z},j} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right) = 0 \right\},$$

où

$$\gamma_{\mathbf{z},j} \left((\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, d_1-1\}} \right) = \sum_{\mathbf{i}=(i_1, \dots, i_{d_1-1}) \in \{0, \dots, m\}^{d_1-1}} F_{\mathbf{z}, \mathbf{i}, j} u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)}.$$

Puis, comme dans la section précédente, en choisissant $\kappa = K_1 \theta$ avec

$$(99) \quad K_1 = (n+2 - \dim V_1^* - \mu)/2^{d_1-1}$$

on déduit du lemme 5.3 :

Lemme 5.5. *Si $\varepsilon > 0$ est un réel arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\mathbf{z}}(\alpha)| \ll d^{m-r+\varepsilon + \frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2+\varepsilon} P^{-K_1 \theta},$
2. le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{\mathbf{z}}(\theta).$

Pour tout le reste de cette section, on fixera $P = P_1$.

5.1.2 Méthode du cercle

On fixe un réel $\theta \in [0, 1]$. On suppose de plus que

$$(100) \quad K_1 > 2(d_1 - 1).$$

On notera

$$(101) \quad \phi_1(d, l, \theta) = dl^{d_2} P_2^{(d_1-1)\theta},$$

$$(102) \quad \Delta_1(\theta, K_1) = \theta(K_1 - 2(d_1 - 1))$$

On supposera de plus θ est tel que

$$\Delta_1(\theta, K_1) > 1.$$

Comme précédemment nous allons vérifier que les arcs mineurs fournissent bien un terme d'erreur.

Lemme 5.6. *Pour tout $\mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$, et si $d_1 \geq 2$, on a la majoration :*

$$\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\mathbf{z}}(\theta)} |S_{\mathbf{z}}(\alpha)| d\alpha \ll d^{m-r+\varepsilon + \frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-d_1-\Delta_1(\theta, K_1)+\varepsilon}.$$

Démonstration. Considérons une suite

$$0 < \theta = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{T-1} < \theta_T = 1$$

telle que

$$(103) \quad 2(\theta_{i+1} - \theta_i)(d_1 - 1) < \varepsilon$$

et $T \ll P_1^\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit (et P_1 assez grand). Puisque $\mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$, par le lemme 5.5 on a

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\mathbf{z}}(\theta_T)} |S_{d,\mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha \\ \ll d^{m-r+\varepsilon + \frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-K_1\theta_T+\varepsilon} \\ \ll d^{m-r+\varepsilon + \frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-d_2-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathfrak{M}^{\mathbf{z}}(\theta)) &\ll \text{Vol}(\mathfrak{M}^{(1),\mathbf{z}}(\theta)) + \text{Vol}(\mathfrak{M}^{(2),\mathbf{z}}(\theta)) \\ &\ll \sum_{q \leq dl^{d_2} P_2^{(d_1-1)\theta}} \sum_{0 \leq a < q} q^{-1} d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1+(d_1-1)\theta} \\ &\quad + \sum_{q \leq l^{d_2} P_2^{(d_1-1)\theta}} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} q^{-1} d^{-d_1} P_1^{-d_1+(d_1-1)\theta} \\ &\ll d^{(2-d_1)} l^{d_2} P_1^{-d_1+2(d_1-1)\theta}. \end{aligned}$$

On a alors pour tout $i \in \{0, \dots, T-1\}$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{\mathbf{z}}(\theta_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}^{\mathbf{z}}(\theta_i)} |S_{d,\mathbf{z}}(\alpha)| d\alpha \\ \ll d^{m-r+\varepsilon + \frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-K_1\theta_i+\varepsilon} \text{Vol}(\mathfrak{M}^{\mathbf{z}}(\theta_{i+1})) \\ \ll d^{m-r+\varepsilon + \frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}} + (2-d_1)} l^{m-r+d_2+\varepsilon} P_1^{m+2-K_1\theta_i+\varepsilon-d_1+2(d_1-1)\theta_{i+1}} \\ \ll d^{m-r+\varepsilon + \frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}} + (2-d_1)} l^{m-r+d_2+\varepsilon} P_1^{m+2-d_1-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon} \end{aligned}$$

et on obtient le résultat souhaité en sommant sur les $i \in \{0, \dots, T-1\}$. \square

On introduit une nouvelle famille d'arcs majeurs :

$$(104) \quad \mathfrak{M}_{a,q}'^{d,\mathbf{z}}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1[\mid 2|\alpha q - a| \leq q d^{-d_1} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta} \right\},$$

$$(105) \quad \mathfrak{M}'^{d,z}(\theta) = \bigcup_{q \leq \phi_1(d,l,\theta)} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}^{d,z'}(\theta),$$

et on vérifie que $\mathfrak{M}^{d,z}(\theta) \subset \mathfrak{M}'^{d,z}(\theta)$. On a alors le résultat analogue au lemme 4.7 :

Lemme 5.7. *Si $d_1 \geq 2$ et si l'on suppose $l^{2d_2} P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)} < 1$, alors les arcs majeurs $\mathfrak{M}_{a,q}'^{d,z}(\theta)$ sont disjoints deux à deux.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathfrak{M}_{a,q}'^{d,z}(\theta) \cap \mathfrak{M}_{a',q'}^{d,z}(\theta)$ pour $(a, q) \neq (a', q')$, $q, q' \leq \phi_1(d, l, \theta)$, $0 \leq a < q$, $0 \leq a' < q'$ et $\text{pgcd}(a, q) = \text{pgcd}(a', q') = 1$. On a alors

$$1 \leq qq' d^{-d_1} P_1^{-d_1+\theta(d_1-1)} \leq d^{2-d_1} l^{2d_2} P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)} \leq l^{2d_2} P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)},$$

d'où le résultat. \square

Comme précédemment, on déduit des lemmes 5.7 et 5.6 que :

$$(106) \quad N_{d,z}(P_1) = \sum_{q \leq \phi_1(d,l,\theta)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\alpha \in \mathfrak{M}_{a,q}^{d,z'}(\theta)} S_{d,z}(\alpha) d\alpha \\ + O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-d_1-\Delta_1(\theta, K_1)+\varepsilon}\right).$$

On considère $\alpha \in \mathfrak{M}_{a,q}'^{d,z}(\theta)$. On pose $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$ et donc $|\beta| \leq d^{-d_1} P_1^{-d_1+(d_1-1)\theta}$. De la même manière que nous avons établi le lemme 4.9, on démontre :

Lemme 5.8. *On a l'estimation*

$$S_{d,z}(\alpha) = d^{m-r} l^{m-r} P_1^{m+1} q^{-(m+1)} S_{a,q,d}(z) I_z(d^{d_1} P_1^{d_1} \beta) \\ + O\left(d^{m-r+1} l^{2d_2+m-r} P_1^{m+2\theta(d_1-1)}\right),$$

avec

$$(107) \quad S_{a,q,d}(z) = \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{r+1} \times (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}} e\left(\frac{a}{q} F(d\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, z)\right),$$

$$(108) \quad I_z(\beta) = \int_{\substack{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in [-1, 1]^{r+1} \times [-1, 1]^{m-r} \\ |\mathbf{v}| < |\mathbf{u}|}} e(\beta F(\mathbf{u}, l\mathbf{v}, z)) d\mathbf{u} d\mathbf{v}.$$

Par ailleurs, en posant

$$(109) \quad \tilde{\phi}_1(\theta) = \frac{1}{2} P_1^{\theta(d_1-1)},$$

$$(110) \quad \eta_1(\theta) = 1 - 5\theta(d_1 - 1),$$

on démontre un analogue du lemme 4.10 :

Lemme 5.9. *Pour $\mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} N_{d,\mathbf{z}}(P_1) &= d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}}(\phi_1(d, l, \theta)) J_{\mathbf{z}}(\tilde{\phi}_1(\theta)) \\ &\quad + O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-d_1-\Delta_1(\theta, K_1)+\varepsilon}\right) \\ &\quad + O\left(d^{m-r+3-d_1} l^{4d_2+m-r} P_1^{m+1-d_1-\eta(\theta)}\right), \end{aligned}$$

où

$$(111) \quad \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}}(\phi(d, l, \theta)) = \sum_{q \leq \phi(d, l, \theta)} q^{-(m+1)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a, q)=1}} S_{a,q,d}(\mathbf{z}),$$

$$(112) \quad J_{\mathbf{z}}(\tilde{\phi}(\theta)) = \int_{|\beta| \leq \tilde{\phi}(\theta)} I_{\mathbf{z}}(\beta) d\beta.$$

On pose à présent :

$$(113) \quad \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-(m+1)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a, q)=1}} S_{a,q,d}(\mathbf{z}),$$

$$(114) \quad J_{\mathbf{z}} = \int_{\mathbf{R}} I_{\mathbf{z}}(\beta) d\beta.$$

Lemme 5.10. *Soit $\mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. On suppose de plus que $d_1 \geq 2$ et que $\theta < \frac{1}{2(d_1-1)}$. L'intégrale $J_{\mathbf{z}}$ est absolument convergente, et on a :*

$$|J_{\mathbf{z}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{\mathbf{z}}| \ll l^{d_2+\varepsilon} P_1^{-\frac{K_1\theta}{2}+2\theta(d_1-1)}.$$

On a de plus $|J_{\mathbf{z}}| \ll l^{d_2+\varepsilon}$.

Démonstration. On considère β tel que $|\beta| \geq \tilde{\phi}(\theta)$. On choisit alors des paramètres P et θ' tels que

$$(115) \quad |\beta| = \frac{1}{2} P^{\theta'(d_1-1)},$$

$$(116) \quad P^{1-K_1\theta'} = P^{-1+2\theta'(d_1-1)} l^{2d_2}.$$

Remarquons que ces deux égalités impliquent

$$(117) \quad \theta' = \frac{(d_1-1)^{-1} \log(2|\beta|)}{\left(2 + \frac{K_1}{(d_1-1)}\right) \log(2|\beta|) + 2d_2 \log(l)}$$

donc en particulier

$$(118) \quad \theta' \gg \min \left\{ 1, \frac{\log(|\beta|)}{\log(l)} \right\}.$$

Par ailleurs, on a d'après (116) :

$$P^{-2+3\theta'(d_1-1)} l^{2d_2} = P^{\theta'(d_1-1-K_1)} < 1,$$

donc, pour $d_1 \geq 2$,

$$P^{-d_1+3\theta'(d_1-1)} l^{2d_2} < 1,$$

et ainsi, d'après le lemme 4.7, les arcs majeurs $\mathfrak{M}_{a,q}(\theta')$ correspondant à P et θ' sont disjoints deux à deux. Le réel $P^{-d_1}\beta$ appartient au bord de $\mathfrak{M}_{0,1}(\theta')$, et donc par le lemme 5.5 appliqué à $d = 1$, on a l'estimation :

$$|S_{1,\mathbf{z}}(P^{-d_1}\beta)| \ll l^{m-r+\varepsilon} P^{m+2-K_1\theta'+\varepsilon}.$$

Par le lemme 5.8 on a :

$$S_{1,\mathbf{z}}(P^{-d_1}\beta) = l^{m-r} P^{m+1} I_{\mathbf{z}}(\beta) + O\left(l^{m-r+2d_2} P^{m+2\theta'(d_1-1)}\right).$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} |I_{\mathbf{z}}(\beta)| &\ll l^\varepsilon P^{1-K_1\theta'+\varepsilon} + l^{2d_2} P^{-1+2\theta'(d_1-1)} \\ &\ll l^\varepsilon P^{1-K_1\theta'+\varepsilon} \\ &\ll l^\varepsilon |\beta|^{\frac{1}{\theta'(d_1-1)} - \frac{K_1}{(d_1-1)} + \frac{\varepsilon}{\theta'(d_1-1)}}. \end{aligned}$$

Étant donné que $\theta' \gg \min \left\{ 1, \frac{\log(|\beta|)}{\log(l)} \right\}$,

$$|\beta|^{\frac{\varepsilon}{\theta'(d_1-1)}} \ll \max\{|\beta|^{\varepsilon'}, l^{\varepsilon'}\},$$

pour $\varepsilon' > 0$ arbitrairement petit. D'autre part, d'après (117) :

$$\begin{aligned} |\beta|^{\frac{1}{\theta'(d_1-1)} - \frac{K_1}{(d_1-1)}} &\ll |\beta|^{\left(1 - \frac{K_1}{2(d_1-1)}\right)} |\beta|^{\frac{\log(l^{d_2})}{\log(2|\beta|)}} \\ &\ll l^{d_2} |\beta|^{\left(1 - \frac{K_1}{2(d_1-1)}\right)}. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} |J_{\mathbf{z}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{\mathbf{z}}| &\ll l^{d_2+\varepsilon} \int_{|\beta| > \tilde{\phi}(\theta)} |\beta|^{\left(1 - \frac{K_1}{2(d_1-1)}\right)+\varepsilon} d\beta \\ &\ll l^{d_2+\varepsilon} \tilde{\phi}(\theta)^{2 - \frac{K_1}{2(d_1-1)} + \varepsilon} \\ &\ll l^{d_2+\varepsilon} P_1^{2\theta(d_1-1) - \frac{K_1\theta}{2} + \varepsilon} \end{aligned}$$

avec ε arbitrairement petit.

D'autre part, en choisissant $P_1 \ll 1$, cette inégalité donne

$$|J_{\mathbf{z}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{\mathbf{z}}| \ll l^{d_2+\varepsilon},$$

et puisque $|J_{\mathbf{z}}(\tilde{\phi}(\theta))| \ll 1$ lorsque $P_1 \ll 1$, on a immédiatement

$$|J_{\mathbf{z}}| \ll l^{d_2+\varepsilon}$$

□

On introduit pour \mathbf{z} fixé et $P \geq 1$ la nouvelle série génératrice :

$$S'_{d,\mathbf{z}}(\alpha) = \sum_{|\mathbf{x}| \leq P} \sum_{|\mathbf{y}| \leq P} e(\alpha F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

De la même manière que pour le lemme 5.5, on établit :

Lemme 5.11. *Si $\varepsilon > 0$ est un réel arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S'_{d,\mathbf{z}}(\alpha)| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} P^{m+1+\varepsilon-K_1\theta},$
2. le réel α appartient à $\bigcup_{q \leq dl^{d_2} P^{(d_1-1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}^{\mathbf{z}}(\theta).$

De la même manière que pour le lemme 4.12, on en déduit :

Lemme 5.12. *Soit $\mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. On suppose de plus que $d_1 \geq 2$. La série $\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}$ est absolument convergente, et on a :*

$$|\mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}}(\phi_1(d, l, \theta)) - \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}}| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}} + 2 + \varepsilon} l^{2d_2+\varepsilon} P_1^{\theta(2(d_1-1)-K_1)}.$$

On a de plus $|\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}} + 2 + \varepsilon} l^{2d_2+\varepsilon}.$

Démonstration. On considère $q > \phi(d, k, \theta)$, $\alpha = \frac{a}{q}$ avec $0 \leq a < q$ et $\text{pgcd}(a, q) = 1$. On a alors $S_{a,q,d}(z) = S'_{d,z}(\alpha)$ avec $P = q$. On considère θ' tel que $q = dl^{d_2}q^{(d_1-1)\theta'}$. Si $\theta'' = \theta' - \nu$ pour $\nu > 0$ arbitrairement petit, alors s'il existait $a', q' \in \mathbf{Z}$ tels que $0 \leq a' < q'$, $\text{pgcd}(a', q') = 1$, $q' \leq dl^{d_2}q^{\theta''(d_1-1)} < q$ et $\alpha \in \mathfrak{M}_{a',q'}^z(\theta'')$, on aurait alors

$$1 \leq |aq' - a'q| \leq q^{1-d_1+\theta'(d_1-1)},$$

ce qui est absurde pour $d_1 \geq 2$. On a donc, par le lemme précédent :

$$|S_{a,q,d}(z)| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}} q^{m+1+\varepsilon-K_1\theta'}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_{d,z}(\phi_1(d, l, \theta)) - \mathfrak{S}_{d,z}| &\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}} \sum_{q > \phi_1(d, l, \theta)} q^{-(m+1)} \sum_{0 \leq a < q} |S_{a,q,d}(z)| \\ &\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}} \sum_{q > \phi_1(d, l, \theta)} q^{-(m+1)} \sum_{0 \leq a < q} q^{m+1+\varepsilon-K_1\theta'} \\ &\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}} \sum_{q > \phi(d, l, \theta)} q^{-\frac{K_1}{(d_1-1)}+1+\varepsilon} l^{\frac{d_2 K_1}{(d_1-1)}} d^{\frac{K_1}{(d_1-1)}} \\ &\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}+2+\varepsilon} l^{2d_2+\varepsilon} P_1^{\theta(2(d_1-1)-K_1)+\varepsilon}. \end{aligned}$$

En prenant $P_1 \ll 1$ cette majoration donne :

$$|\mathfrak{S}_{d,z}(\phi_1(d, l, \theta)) - \mathfrak{S}_{d,z}| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}+2+\varepsilon} l^{2d_2+\varepsilon},$$

et en considérant la majoration triviale $|\mathfrak{S}_{d,z}(\phi_1(d, l, \theta))| \ll d^2 l^{2d_2}$, on trouve finalement

$$|\mathfrak{S}_{d,z}| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}+2+\varepsilon} l^{2d_2+\varepsilon}.$$

□

On déduit alors des lemmes 5.12 et 5.10 :

Lemme 5.13. *Soit $z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$. On suppose fixés $\theta \in [0, 1]$ et $P_1 \geq 1$ tels que $l^{2d_2} P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)} < 1$. On suppose de plus que $K_1 > 4(d_1-1)$ et $d_1 \geq 2$. On a alors que*

$$N_{d,z}(P_1) = \mathfrak{S}_{d,z} J_z d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} + O(E_2) + O(E_3),$$

avec

$$\begin{aligned} E_2 &= d^{m-r+3-d_1} l^{4d_2+m-r} P^{m+1-d_1-\eta(\theta)}, \\ E_3 &= d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}+\varepsilon} l^{3d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1+2\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{2}+\varepsilon} \end{aligned}$$

et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. Par le lemme 5.9 :

$$N_{d,z}(P_1) = d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} \mathfrak{S}_{d,z}(\phi_1(d, l, \theta)) J_z(\tilde{\phi}_1(\theta)) + O(E_1) + O(E_2),$$

où

$$E_1 = d^{m-r+\varepsilon + \frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1-\Delta_1(\theta, K_1)+\varepsilon} \ll E_3.$$

Par ailleurs, d'après les lemmes 5.12 et 5.10, on a

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{S}_{d,z}(\phi_1(d, l, \theta)) J_z(\tilde{\phi}_1(\theta)) - \mathfrak{S}_{d,z} J_z \right| \\ & \leq |\mathfrak{S}_{d,z}(\phi_1(d, l, \theta)) - \mathfrak{S}_{d,z}| |J_z| + |\mathfrak{S}_{d,z}(\phi_1(d, l, \theta))| |J_z(\tilde{\phi}_1(\theta)) - J_z| \\ & \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+2+\varepsilon} l^{3d_2+2\varepsilon} P_1^{\theta(2(d_1-1)-K_1)} + d^2 l^{3d_2+2\varepsilon} P_1^{\theta(2(d_1-1)-\frac{K_1}{2})+\varepsilon}, \end{aligned}$$

et en multipliant par $d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1}$, on obtient un terme d'erreur

$$d^{m-r-d_1} \frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}} + 2 + \varepsilon l^{3d_2+2\varepsilon} P_1^{m+1-d_1+2\theta(d_1-1)-\frac{K_1}{2}+\varepsilon},$$

d'où le résultat. \square

En fixant $\theta > 0$ tel que $\theta < \frac{1}{5(d_1-1)}$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.14. *Soit $z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$. On suppose que $K_1 > 4(d_1 - 1)$ et $d_1 \geq 2$. Il existe alors un réel $\delta > 0$ arbitrairement petit tel que :*

$$\begin{aligned} N_{d,z}(P_1) &= \mathfrak{S}_{d,z} J_z d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} \\ &+ O\left(d^{m-r} \max\left\{d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\right\} l^{m-r+4d_2} P_1^{m+1-d_1-\delta}\right), \end{aligned}$$

uniformément pour tout $l < P_1^{\frac{d_1-1}{2d_2}}$.

On pose à présent $P_1 = P_2^b$, avec $b \geq 1$ et on introduit la fonction

$$(119) \quad g_1(b, \delta) = \left(1 - \frac{5d_2}{b} - \delta\right)^{-1} 5(d_1 - 1) \left(\frac{4d_2}{b} + 2\delta\right),$$

ainsi que

$$\begin{aligned} (120) \quad \tilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1, P_2) &= \text{Card} \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}), |x| \leq P_1, \right. \\ &\quad |y| < d|x|P_2, |z| \leq P_2, |y| \leq d|x||z|, F(dx, y, z) = 0 \} \\ &= \text{Card} \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}), |x| \leq P_1, \right. \\ &\quad \left. |y| < d|x|P_2, |z| \leq P_2, \left\lfloor \frac{|y|}{d|x|} \right\rfloor < |z|, F(dx, y, z) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

On a alors la proposition suivante qui est l'analogie de 4.17 :

Proposition 5.15. *On suppose $K_1 > 4(d_1 - 1)$, $P_1 = P_2^b$ et de plus que*

$$\frac{K_1}{2} - 2(d_1 - 1) > g_1(b, \delta).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1, P_2) &= \left(\sum_{\mathbf{z} \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}} J_{\mathbf{z}} |\mathbf{z}|^{m-r} \right) d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} \\ &\quad + O \left(d^{m-r} \max \left\{ d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1} + \varepsilon}, d^{3-d_1} \right\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2} \right), \end{aligned}$$

pour $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. On sait, d'après le lemme 5.13 que :

$$\tilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1, P_2) = \left(\sum_{\mathbf{z} \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}} J_{\mathbf{z}} |\mathbf{z}|^{m-r} \right) d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} + O(\mathcal{E}_2) + O(\mathcal{E}_3),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= d^{m-r+3-d_1} \sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{\mathbf{z} \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{z}|=l}} l^{4d_2+m-r} P_1^{m+1-d_1-\eta(\theta)} \\ &\ll d^{m-r+3-d_1} P_1^{m+1-d_1-\eta(\theta)} P_2^{4d_2+n-r+1} \\ &= d^{m-r+3-d_1} P_1^{m+1-d_1+\frac{5d_2}{b}-\eta(\theta)} P_2^{n-r+1-d_2}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &= d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}+\varepsilon} \sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{\mathbf{z} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{z}|=l}} l^{3d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{n-r+1-d_1+2\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{2}+\varepsilon} \\ &\ll d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1+2\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{2}+\frac{4d_2}{b}+2\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2}. \end{aligned}$$

Rappelons que $\eta(\theta) = 1 - 5\theta(d_1 - 1)$. On choisit alors

$$\theta = \frac{1}{5(d_1 - 1)} \left(1 - \frac{5d_2}{b} - \delta \right),$$

de sorte que

$$\frac{5d_2}{b} - \eta(\theta) = -\delta.$$

On a par ailleurs, puisque $2\theta(d_1 - 1) - \frac{K_1\theta}{2} > g_1(b, \delta)$,

$$-2\theta(d_1 - 1) + \frac{K_1\theta}{2} > \left(\frac{4d_2}{b} + 2\delta \right),$$

d'où le résultat. □

5.2 Deuxième cas

On suppose à présent $l = \left\lfloor \frac{|y|}{d|x|} \right\rfloor \geq |z|$. Dans cette partie nous fixerons l'entier l et z de norme $|z| \leq l$, et nous allons évaluer

$$(121) \quad N_{d,l,z}(P_1) = \text{Card} \left\{ (x, y) \in \mathbf{Z}^{m+1} \mid |x| \leq P_1, \, dl|x| \leq |y| < d(l+1)|x|, \, F(dx, y, z) = 0 \right\}.$$

Pour cela on introduit la série génératrice

$$(122) \quad S_{d,l,z}(\alpha) = \sum_{|x| \leq P_1} \sum_{dl|x| \leq |y| < d(l+1)|x|} e(\alpha F(dx, y, z)),$$

de sorte que $N_{d,l,z}(P_1) = \int_0^1 S_{d,l,z}(\alpha) d\alpha$.

Les résultats que nous obtiendrons dans cette section seront sensiblement identiques à ceux de la section précédente, à quelques modifications près.

5.2.1 Somme d'exponentielles

Dans ce qui va suivre, pour un y donné, on note $N = \left\lfloor \frac{|y|}{d} \right\rfloor$ et $M = \left\lfloor \frac{|y|}{d(l+1)} \right\rfloor$. On a alors

$$dl|x| \leq |y| < d(l+1)|x| \Leftrightarrow M < |x| \leq N.$$

On note alors, pour $N, M \in \{0, \dots, P_1\}$:

$$(123) \quad S_{d,N,M,l,z}(\alpha) = \sum_{M < |x| \leq N} \sum_{\substack{dNl \leq |y| < d(N+1)l \\ dM(l+1) \leq |y| < d(M+1)(l+1)}} e(\alpha F(dx, y, z)),$$

et on a

$$(124) \quad S_{d,l,z}(\alpha) = \sum_{N=1}^{P_1} \sum_{M=1}^{P_1} S_{d,N,M,l,z}(\alpha).$$

En appliquant la méthode de différenciation de Weyl des sections précédentes on montre que :

$$|S_{d,N,M,l,z}(\alpha)|^{2^{d_1-1}} \ll (P_1^{r+1+\varepsilon})^{2^{d_1-1}-d_1+1} ((dlP_1)^{m-r+\varepsilon})^{2^{d_1-1}-d_1+1} M_{d,z}(\alpha, P_1, dlP_1, P_1^{-1}, (dlP_1)^{-1}),$$

où $M_{d,z}(\alpha, P_1, dlP_1, P_1^{-1}, (dlP_1)^{-1})$ a été défini dans la section précédente (cf. (91)).

Puis, en sommant sur M et N , on en déduit le lemme ci-dessous :

Lemme 5.16. *Pour tous $P > 1$, $\kappa > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,l,z}(\alpha)| \ll d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon} P_1^{m+3+\varepsilon} l^{m-r+\varepsilon} P^{-\kappa},$
2. $M_{d,z}(\alpha, P_1, dlP_1, P_1^{-1}, (dlP_1)^{-1}) \gg (P_1^{r+1})^{d_1-1} ((dlP_1)^{m-r})^{d_1-1} P^{-2^{d_1-1}\kappa}.$

Par les mêmes arguments que ceux employés dans la section précédente, on en déduit l'équivalent du lemme 5.5,

Lemme 5.17. *Si $\varepsilon > 0$ est un réel arbitrairement petit, et si $z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,l,z}(\alpha)| \ll d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+3+\varepsilon} P^{-K_1\theta},$
2. le réel α appartient à $\mathfrak{M}^l(\theta)$,

où l'on a noté

$$(125) \quad \mathfrak{M}^l(\theta) = \mathfrak{M}^{(1),l}(\theta) \cup \mathfrak{M}^{(2),l}(\theta)$$

$$(126) \quad \mathfrak{M}_{a,q}^{(1),l}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1[\mid 2|\alpha q - a| \leq d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta} \right\},$$

$$(127) \quad \mathfrak{M}^{(1),l}(\theta) = \bigcup_{\substack{q \leq dl^{d_2} P^{(d_1-1)\theta} \\ d|q}} \bigcup_{0 \leq a < q} \mathfrak{M}_{a,q}^{(1),l}(\theta).$$

$$(128) \quad \mathfrak{M}_{a,q}^{(2),l}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0, 1[\mid 2|\alpha q - a| \leq d^{-d_1} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta} \right\},$$

$$(129) \quad \mathfrak{M}^{(2),l}(\theta) = \bigcup_{q \leq l^{d_2} P^{(d_1-1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}^{(2),l}(\theta).$$

À partir d'ici, on fixe à nouveau $P = P_1$.

5.2.2 Méthode du cercle

Pour les arcs mineurs, les calculs effectués pour établir le lemme 5.6

Lemme 5.18. *Pour tout $z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$, on a la majoration :*

$$\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^l(\theta)} |S_{d,l,z}(\alpha)| d\alpha \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+3-d_1-\Delta_1(\theta, K_1)+\varepsilon}.$$

Pour les arcs majeurs, on a les équivalents des lemmes 5.8 et 5.9 :

Lemme 5.19. *On a l'estimation*

$$S_{d,l,z}(\alpha) = d^{m-r} l^{m-r} P_1^{m+1} q^{-(m+1)} S_{a,q,d}(z) I_{l,z}(d^{d_1} P_1^{d_1} \beta) \\ + O\left(d^{m-r+1} l^{2d_2+m-r} P_1^{m+2\theta(d_1-1)}\right),$$

avec

$$(130) \quad S_{d,a,q}(z) = \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{r+1} \times (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}} e\left(\frac{a}{q} F(d\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, z)\right),$$

$$(131) \quad I_{l,z}(\beta) = \int_{\substack{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in [-1,1]^{r+1} \times [-1,1]^{m-r} \\ |\mathbf{u}| \leq |\mathbf{v}| < (1+\frac{1}{l})|\mathbf{u}|}} e(\beta F(\mathbf{u}, l\mathbf{v}, z)) d\mathbf{u} d\mathbf{v}.$$

Lemme 5.20. *Pour $z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on a l'estimation suivante :*

$$N_{d,l,z}(P_1) = d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} \mathfrak{S}_{d,z}(\phi_1(d, l, \theta)) J_{l,z}(\tilde{\phi}_1(\theta)) \\ + O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+3-d_1-\Delta_1(\theta, K_1)+\varepsilon}\right) \\ + O\left(d^{m-r+3-d_1} l^{4d_2+m-r} P_1^{m+1-d_1-\eta(\theta)}\right),$$

où

$$(132) \quad \mathfrak{S}_{d,z}(\phi(d, l, \theta)) = \sum_{q \leq \phi(d, l, \theta)} q^{-(m+1)} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a, q)=1}} S_{a,q,d}(z),$$

$$(133) \quad J_{l,z}(\tilde{\phi}(\theta)) = \int_{|\beta| \leq \tilde{\phi}(\theta)} I_{l,z}(\beta) d\beta.$$

Si l'on note :

$$(134) \quad J_{l,z} = \int_{\mathbf{R}} I_{l,z}(\beta) d\beta,$$

on montre alors comme pour le lemme 5.10 :

Lemme 5.21. *Soit $z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. On suppose de plus que $d_1 \geq 2$. L'intégrale $J_{l,z}$ est absolument convergente, et on a :*

$$|J_{l,z}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{l,z}| \ll l^{\frac{4d_2}{3}+\varepsilon} P_1^{-\frac{K_1}{3}+\frac{7}{3}\theta(d_1-1)+\varepsilon}.$$

On a de plus $|J_z| \ll l^{\frac{4d_2}{3}+\varepsilon}$.

et on déduit des lemmes 5.20, 5.21 et 5.12 :

Lemme 5.22. *Soit $z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$. On suppose fixés $\theta \in [0, 1]$ et $P_1 \geq 1$ tels que $l^{2d_2} P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)} < 1$. On suppose de plus que $K_1 > 7(d_1 - 1)$ et $d_1 \geq 2$. On a alors que*

$$N_{d,l,z}(P_1) = \mathfrak{S}_{d,z} J_{l,z} d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} + O(E_2) + O(E_3),$$

avec

$$E_2 = d^{m-r+3-d_1} l^{4d_2+m-r} P_1^{m+1-d_1-\eta(\theta)},$$

$$E_3 = d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}+\varepsilon} l^{\frac{10d_2}{3}+m-r+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1+\frac{7}{3}\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{3}+\varepsilon}$$

et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Corollaire 5.23. *Soit $z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$. On suppose que $K_1 > 7(d_1 - 1)$ et $d_1 \geq 2$. Il existe alors un réel $\delta > 0$ arbitrairement petit tel que :*

$$N_{d,l,z}(P_1) = \mathfrak{S}_{d,z} J_{l,z} d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} + O\left(d^{m-r} \max\left\{d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\right\} l^{m-r+4d_2} P_1^{m+1-d_1-\delta}\right),$$

uniformément pour tout $l < P_1^{\frac{d_1-1}{2d_2}}$.

On pose à présent $P_1 = P_2^b$, avec $b \geq 1$ et on introduit la fonction

$$(135) \quad g'_1(b, \delta) = \left(1 - \frac{5d_2}{b} - \delta\right)^{-1} 5(d_1 - 1) \left(\frac{10d_2}{3b} + 2\delta\right),$$

ainsi que

$$(136) \quad \tilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1, P_2) = \text{Card} \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}), |x| \leq P_1, \right. \\ \left. |y| \leq d|x|P_2, |z| \leq P_2, \left\lfloor \frac{|y|}{d|x|} \right\rfloor \geq |z|, F(dx, y, z) = 0 \right\}.$$

On a alors la proposition suivante qui est l'analogue de 5.15 :

Proposition 5.24. *On suppose $K_1 > 7(d_1 - 1)$, $d_1 \geq 2$, $P_1 = P_2^b$ et de plus que*

$$\frac{K_1\theta}{3} - \frac{7}{3}\theta(d_1 - 1) > g'_1(b, \delta).$$

Alors :

$$\tilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1, P_2) = d^{m-r-d_1} \left(\sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{z \in P_2 B_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |z| \leq l}} \mathfrak{S}_{z, J_{l,z}} l^{m-r} \right) P_1^{m+1-d_1} \\ + O\left(d^{m-r} \max\left\{d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\right\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2}\right),$$

pour $\delta > 0$ arbitrairement petit.

6 Quatrième étape

L'objectif est à présent de regrouper les résultats obtenus pour en déduire une formule asymptotique pour $N_d(P_1, P_2)$ avec n assez grand et P_1, P_2 quelconques.

On définit dans un premier temps b_1 comme le réel minimisant la fonction

$$(137) \quad b \mapsto \max\{2^{\tilde{d}}(bd_1+d_2), 2^{\tilde{d}}(5b+2)(\tilde{d}+1), 2^{d_1-1}(4(d_1-1)+2g_1(b, \delta)+\lceil bd_1+d_2+\delta \rceil) \\ 2^{d_1-1}(7(d_1-1)+3g'_1(b, \delta)+\lceil bd_1+d_2+\delta \rceil)\}$$

et on notera m_1 le minimum correspondant. On définit de même u_1 le réel minimisant

$$(138) \quad u \mapsto \max\{2^{\tilde{d}}(d_1+ud_2), 7 \cdot 2^{\tilde{d}}(\tilde{d}+1), 2^{d_2-1}(2(d_2-1)+g_2(u, \delta)+\lceil d_1+ud_2+\delta \rceil)\}$$

et m_2 le minimum correspondant. On note par ailleurs $m = \max\{m_1, m_2\}$. Un calcul en $b = 10d_2$ et $u = 10d_1$ montre que

$$(139) \quad 2^{d_1+d_2} \leq m \leq 13d_2(d_1+d_2)2^{d_1+d_2}.$$

À partir d'ici on fixe

$$(140) \quad \mu = \lceil b_1d_1 + d_2 + \delta \rceil, \quad \lambda = \lceil d_1 + u_1d_2 + \delta \rceil$$

On commence par établir le lemme suivant :

Lemme 6.1. *On suppose $n + 2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m$. On a alors pour tout $P_2 \geq 1$:*

$$\sum_{z \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,z} J_z d^{m-r-d_1} |z|^{m-r} + \sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{z \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |z| \leq l}} \mathfrak{S}_{d,z} J_{l,z} d^{m-r-d_1} l^{m-r} \\ = d^{m-r-d_1} \mathfrak{S}_d J P_2^{n-r+1-d_2} + O(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}).$$

Démonstration. On choisit dans un premier temps P_1 tel que $P_1 = P_2^{b_1}$. D'après les propositions 5.15 et 5.24, on a

$$(141) \quad \tilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1, P_2) + \tilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1, P_2) \\ = \left(\sum_{z \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,z} J_z |z|^{m-r} + \sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{z \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |z| \leq l}} \mathfrak{S}_{d,z} J_{l,z} l^{m-r} \right) d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} \\ + O \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2} \right)$$

Notons à présent

$$(142) \quad \tilde{N}_{d,1}(P_1, P_2) = \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}), |\mathbf{x}| \leq P_1, \right. \\ \left. \max \left(\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor, |\mathbf{z}| \right) \leq P_2, F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\}.$$

et

$$(143) \quad N_{d,1}(P_1, P_2) = \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}), |\mathbf{x}| \leq P_1, \right. \\ \left. \max \left(\frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|}, |\mathbf{z}| \right) \leq P_2, F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\}.$$

On remarque d'une part que

$$N_{d,1}(P_1, P_2) \leq \tilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1, P_2) + \tilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1, P_2) = \tilde{N}_{d,1}(P_1, P_2) \leq N_{d,1}(P_1, P_2 + 1),$$

et d'autre part, en utilisant la proposition 5.4 :

$$\begin{aligned} N_{d,1}(P_1, P_2) &= N_d(P_1, P_2) + O \left(\sum_{\mathbf{z} \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap (\mathcal{A}_1^\mu)^c(\mathbf{Z})} d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{m-r} \right) \\ &= N_d(P_1, P_2) + O \left(d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{m-r} P_2^{n-r+1-\mu} \right) \\ &= N_d(P_1, P_2) + O \left(d^{m-r} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right), \end{aligned}$$

par définition de μ .

Par ailleurs, étant donné que $n + 2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > 2\tilde{d}(5b_1 + 2)(\tilde{d} + 1)$, la proposition 3.21 donne :

$$\begin{aligned} N_d(P_1, P_2) &= \sigma_d d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ &\quad + O \left(d^{m-r} \max\{d^{d_1(r+1)/2\tilde{d}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right). \end{aligned}$$

On a donc que

$$\begin{aligned} &|N_{d,1}^{(1)}(P_1, P_2) + \tilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1, P_2) - N_d(P_1, P_2)| \\ &\ll N_d(P_1, P_2 + 1) - N_d(P_1, P_2) + O \left(d^{m-r} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right) \\ &\ll \sigma_d P_1^{m+1-d_1} ((P_2 + 1)^{n-r+1-d_2} - P_2^{n-r+1-d_2}) \\ &\quad + O \left(d^{m-r} \max\{d^{d_1(r+1)/2\tilde{d}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right) \\ &\ll d^{m-r} \max\{d^{d_1(r+1)/2\tilde{d}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}, \end{aligned}$$

étant donné que $\sigma_d = d^{m-r-d_1} \mathfrak{S}_d J \ll d^{m-r-d_1} \max\{d^{\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}}, d^2\}$, d'après la remarque 3.20.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\mathbf{z} \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}} J_{\mathbf{z}} |\mathbf{z}|^{m-r} + \sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{\mathbf{z} \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{z}| \leq l}} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}} J_{l,\mathbf{z}} l^{m-r} \right) d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} \\ &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ &+ O \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}} + \varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right) \end{aligned}$$

en simplifiant par $P_1^{m+1-d_1}$ on obtient le résultat. \square

On démontre de même :

Lemme 6.2. *On suppose $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m$. Alors pour tout $P_1 \geq 1$ et $d_2 \geq 2$:*

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}} d^{m-r} |\mathbf{x}|^{m-r} = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} \\ &+ O(d^{m-r} \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}} + \varepsilon}, d^{4d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta}). \end{aligned}$$

Pour le cas $d_2 = 1$, en notant $u'_1 = d_1 + \delta$, $m'_2 = 7d_1 2^{d_1-1}$ et $\lambda' = \lceil d_1 + u'_1 + \delta \rceil$ on trouve :

Lemme 6.3. *On suppose $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m' = \max\{m_1, m'_2\}$. Alors si $d_2 = 1$ et $P_1 \geq 1$:*

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \frac{\text{Vol}(C_{d,\mathbf{x}})}{\det(\Lambda_{d,\mathbf{x}})} = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} \\ &+ O(d^{m-r} \max\{d^{d_1(r+1)/2^{d_1-1} + \varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta}). \end{aligned}$$

Nous sommes en mesure de démontrer la proposition suivante :

Proposition 6.4. *On suppose $d_1 \geq 2$, $P_1 \geq P_2$ et $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m$. On a alors*

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{d,1}(P_1, P_2) &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ &+ O \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}} + \varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. On suppose dans un premier temps que $b \geq b_1$. On a alors puisque $n + 2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m$ et puisque les fonctions g_1 et g'_1 sont décroissantes en b :

$$\frac{K_1}{2} - 2(d_1 - 1) > g_1(b_1, \delta) > g_1(b, \delta),$$

$$\frac{K_1}{3} - \frac{7}{3}(d_1 - 1) > g'_1(b_1, \delta) > g'_1(b, \delta).$$

Par conséquent on peut appliquer les propositions 5.15 et 5.24 et on a alors

$$\begin{aligned} & N_{d,1}^{(1)}(P_1, P_2) + \tilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1, P_2) \\ &= \left(\sum_{z \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,z} J_z |z|^{m-r} + \sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{z \in P_2 \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |z| \leq l}} \mathfrak{S}_{d,z} J_{l,z} l^{m-r} \right) d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} \\ &\quad + O \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2} \right) \\ &\quad = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ &\quad + O \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right) \end{aligned}$$

en utilisant le lemme précédent. On remarque d'autre part que

$$\tilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1, P_2) + \tilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1, P_2) = \tilde{N}_{d,1}(P_1, P_2)$$

et ainsi que

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{d,1}(P_1, P_2) &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ &\quad + O \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right). \end{aligned}$$

Si l'on suppose à présent $b < b_1$, on a alors

$$K > \max\{b_1 d_1 + d_2, (5b_1 + 2)(\tilde{d} + 1)\} > \max\{b d_1 + d_2, (5b + 2)(\tilde{d} + 1)\}.$$

Par la proposition 3.21, on a donc

$$\begin{aligned} N_d(P_1, P_2) &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ &\quad + O \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right). \end{aligned}$$

Or comme dans la démonstration du lemme 6.1, on a que :

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{d,1}(P_1, P_2) &= N_d(P_1, P_2) \\ &\quad + O \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right), \end{aligned}$$

ce qui clôt la démonstration. \square

Si l'on note

$$(144) \quad \tilde{N}_{d,2}(P_1, P_2) = \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}), |\mathbf{x}| \leq P_1, \right. \\ \left. \max \left(\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor, |\mathbf{z}| \right) \leq P_2, F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\},$$

on a un résultat analogue :

Proposition 6.5. *Si l'on suppose $d_1, d_2 \geq 2$, $P_1 \leq P_2$ et $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m$, On a alors*

$$\tilde{N}_{d,2}(P_1, P_2) = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ + O \left(d^{m-r} \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d^{5d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2} \right).$$

Si l'on a $d_1 \geq 2$, $d_2 = 1$, $P_1 \leq P_2$ et $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m'$, alors

$$\tilde{N}_{d,2}(P_1, P_2) = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r} \\ + O \left(d^{m-r} \max\{d^{d_1(r+1)/2^{d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r} \right).$$

Considérons à présent l'ouvert de Zariski

$$(145) \quad U = \mathcal{A}_2^\lambda \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{m-r} \times \mathcal{A}_1^\mu \subset \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+2}.$$

On note alors

$$(146) \quad \tilde{N}_{d,U}(P_1, P_2) = \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid |\mathbf{x}| \leq P_1, \right. \\ \left. \max \left(\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor, |\mathbf{z}| \right) \leq P_2, F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \right\},$$

On en déduit :

Proposition 6.6. *Si l'on suppose $d_1, d_2 \geq 2$ et $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m$, on a alors*

$$\tilde{N}_{d,U}(P_1, P_2) = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ + O_\delta \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{5d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \min\{P_1, P_2\}^{-\delta} \right),$$

pour $\delta > 0$ arbitrairement petit. Pour $d_1 \geq 2$, $d_2 = 1$, $P_1 \leq P_2$ et $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m'$, on a

$$\tilde{N}_{d,U}(P_1, P_2) = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r} \\ + O_\delta \left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{d_1(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r} \min\{P_1, P_2\}^{-\delta} \right).$$

Démonstration. On suppose $P_1 \geq P_2$. On évalue le terme d'erreur

$$\begin{aligned}
|\tilde{N}_{d,U}(P_1, P_2) - \tilde{N}_{d,1}(P_1, P_2)| &\ll \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1} d^{m-r} P_1^{m-r} P_2^{n-r+1} \\
&\ll d^{m-r} P_1^{m+1-\lambda} P_2^{n-r+1} \\
&\ll d^{m-r} P_1^{m+1-d_1-u_1 d_2-\delta} P_2^{n-r+1} \\
&\ll d^{m-r} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2}
\end{aligned}$$

car $u_1 \geq 1$. Pour $P_1 \leq P_2$, on obtient le même résultat avec $|\tilde{N}_{d,U}(P_1, P_2) - \tilde{N}_{d,2}(P_1, P_2)|$. \square

7 Cinquième étape

7.1 Un résultat intermédiaire

Nous allons à présent utiliser la formule obtenue pour $\tilde{N}_U(P_1, P_2)$ dans la proposition 6.6 pour trouver une formule asymptotique pour $N_{d,U}(B)$. Pour résoudre ce problème, nous allons appliquer une version légèrement modifiée (tenant compte de la dépendance en d des fonctions de comptage) de la méthode développée par Blomer et Brüdern dans [B-B] pour le cas des hypersurfaces diagonales des espaces multiprojectifs, et reprise dans la section 9 de [Sch2].

Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, on considère une fonction $f_d : \mathbf{N}^2 \rightarrow [0, +\infty[$. Conformément aux notations de [B-B], on dira que f_d est une $(\beta_1, \beta_2, C_d, D, \alpha, v, \delta)$ -fonction si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1. On a

$$\sum_{\substack{k \leq K \\ l \leq L}} f_d(k, l) = C_d K^{\beta_1} L^{\beta_2} + O(d^v K^{\beta_1} L^{\beta_2} \min\{K, L\}^{-\delta})$$

pour tous $K, L \geq 1$.

2. Il existe des fonctions $c_{1,d}, c_{2,d} : \mathbf{N} \rightarrow [0, +\infty[$ telles que :

$$\sum_{l \leq L} f_d(k, l) = c_{d,1}(k) L^{\beta_2} + O\left(k^D d^v L^{\beta_2-\delta}\right),$$

uniformément pour tous $L \geq 1$ et $k \leq d^{-1} L^\alpha$,

$$\sum_{k \leq K} f_d(k, l) = c_{d,2}(l) K^{\beta_1} + O\left(l^D d^v K^{\beta_1-\delta}\right),$$

uniformément pour tous $K \geq 1$ et $l \leq d^{-1} K^\alpha$.

Nous allons alors démontrer, en nous inspirant des arguments de [Sch2, §9], la proposition suivante qui est une adaptation de [B-B, Théorème 2.1] pour le cas d'une famille de fonctions dépendant d'un paramètre d :

Proposition 7.1. *Si $(f_d)_{d \in \mathbf{N}^*}$ est une famille de $(\beta_1, \beta_2, C_d, D, \alpha, v, \delta)$ -fonctions avec $(C_d)_{d \in \mathbf{N}^*}$ telle que $C_d \ll d^v$, alors on a, pour tout d , la formule asymptotique :*

$$\sum_{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leq P} f_d(k, l) = C_d P \log(P) + O(d^{v+\delta} \log(d) P).$$

On considère $(f_d)_{d \in \mathbf{N}^*}$ une famille de $(\beta_1, \beta_2, C, D, \alpha, v, \delta)$ -fonctions, avec $C_d \ll d^v$ et on définit

$$F_d(K, L) = \sum_{k \leq K} \sum_{l \leq L} f_d(k, l).$$

Lemme 7.2. *Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, on a les estimations :*

$$\sum_{k \leq K} c_{d,1}(k) = C_d K^{\beta_1} + O\left(d^v K^{\beta_1 - \delta}\right),$$

$$\sum_{l \leq L} c_{d,1}(l) = C_d L^{\beta_1} + O\left(d^v L^{\beta_2 - \delta}\right).$$

Démonstration. D'après la condition 1, on a

$$(147) \quad F_d(K, L) = C_d K^{\beta_1} L^{\beta_2} + O(d^v K^{\beta_1} L^{\beta_2} \min\{K, L\}^{-\delta}).$$

Pour $L \geq 1$ et $K \leq L^\alpha$, la condition 2 implique :

$$\begin{aligned} F_d(K, L) &= \sum_{k \leq K} \left(\sum_{l \leq L} f_d(k, l) \right) \\ &= \sum_{k \leq K} \left(c_{d,1}(k) L^{\beta_2} + O\left(k^D d^v L^{\beta_2 - \delta}\right) \right) \\ &= L^{\beta_2} \sum_{k \leq K} c_{d,1}(k) + O\left(d^v K^{D+1} L^{\beta_2 - \delta}\right). \end{aligned}$$

En choisissant L tel que $K \leq L^\alpha$ et $K^{D+1} L^{-\delta} = O(K^{\beta_1 - \delta})$, on obtient alors en utilisant la formule (147) :

$$\sum_{k \leq K} c_{d,1}(k) = C_d K^{\beta_1} + O\left(d^v K^{\beta_1 - \delta}\right).$$

□

Lemme 7.3. *On fixe un réel μ tel que*

$$(148) \quad 0 < \beta_1 \mu < \frac{1}{2},$$

$$(149) \quad \mu \left(1 + \alpha \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \leq \frac{\alpha}{\beta_2},$$

$$(150) \quad \mu \left(D - \beta_1 + 1 + \delta \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) < \frac{\delta}{2\beta_2}.$$

On pose

$$T_{d,1} = \sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} \sum_{P^{\frac{1}{2}} < l^{\beta_2} \leq P/k^{\beta_1}} f_d(k, l).$$

On a alors

$$T_{d,1} = \beta_1 \mu C_d P \log(P) + O(d^{v+\delta} \log(d)P).$$

Démonstration. On remarque dans un premier temps que :

$$T_{d,1} = \sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} \sum_{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leq P} f_d(k, l) - F_d(d^{-1}P^\mu, P^{\frac{1}{2\beta_2}})$$

avec

$$F_d(d^{-1}P^\mu, P^{\frac{1}{2\beta_2}}) = O\left(d^v P^{\beta_1 \mu + \frac{1}{2}}\right) = O(d^v P).$$

D'autre part, par l'hypothèse (149), on a pour tout $k \leq d^{-1}P^\mu$,

$$k^{1+\alpha \frac{\beta_1}{\beta_2}} \leq d^{-(1+\alpha \frac{\beta_1}{\beta_2})} P^{(1+\alpha \frac{\beta_1}{\beta_2})\mu} \leq d^{-1} P^{\frac{\alpha}{\beta_2}},$$

et donc $k \leq d^{-1} \left(P^{\frac{1}{\beta_2}} / k^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right)^\alpha$. La condition 2 donne alors :

$$\begin{aligned} T_{d,1} &= \sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} \left(c_{d,1}(k) \left(P^{\frac{1}{\beta_2}} / k^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right)^{\beta_2} + O\left(k^D d^v \left(P^{\frac{1}{\beta_2}} / k^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right)^{\beta_2 - \delta} \right) \right) + O(d^v P) \\ &= \left(\sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} \frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}} \right) P + O\left(\left(\sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} k^{D-\beta_1+\delta \frac{\beta_1}{\beta_2}} \right) d^v P^{1-\frac{\delta}{\beta_2}} \right) + O(d^v P) \\ &= \left(\sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} \frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}} \right) P + O\left(P^{\mu(D-\beta_1+1+\delta \frac{\beta_1}{\beta_2})} d^v P^{1-\frac{\delta}{\beta_2}} + O(d^v P) \right) \\ &= \left(\sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} \frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}} \right) P + O(d^v P). \end{aligned}$$

Il nous faut à présent évaluer $\sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} \frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}}$. Par sommation par parties, et en utilisant le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} \frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}} &= d^{\beta_1} P^{-\mu\beta_1} \sum_{k \leq d^{-1}P^\mu} c_{d,1}(k) + \beta_1 \int_1^{d^{-1}P^\mu} t^{-\beta_1-1} \sum_{k \leq t} c_{d,1}(k) dt \\
&= d^{\beta_1} P^{-\mu\beta_1} \left(C_d d^{-\beta_1} P^{\mu\beta_1} + O\left(d^{v-\beta_1+\delta} P^{\mu\beta_1-\delta\mu}\right) \right) \\
&\quad + \beta_1 \int_1^{d^{-1}P^\mu} t^{-\beta_1-1} \left(C_d t^{\beta_1} + O(d^v t^{\beta_1-\delta}) \right) dt \\
&= C_d + O\left(d^{v+\delta} P^{-\delta\mu}\right) + \beta_1 C_d \log(P^\mu) + O(d^v \log(d)) \\
&= \beta_1 C_d \log(P^\mu) + O(d^{v+\delta})
\end{aligned}$$

□

Lemme 7.4. *On suppose $0 < \mu < \min\{\frac{1}{2\beta_1}, \frac{1}{2\beta_2}\}$, et on définit :*

$$T_{d,2} = \sum_{d^{-1}P^\mu < k \leq P^{\frac{1}{2\beta_1}}} \sum_{P^{\frac{1}{2}} < l^{\beta_2} \leq P/k^{\beta_1}} f_d(k, l).$$

On a alors

$$T_{d,2} = \left(\frac{1}{2} - \beta_1\mu\right) C_d P \log(P) + O(d^{v+\delta} \log(d) P).$$

Démonstration. On fixe $d \in \mathbf{N}^*$. On considère un entier J assez grand et on définit $\theta > 0$ via :

$$(1 + \theta)^J = d P^{\frac{1}{2\beta_1} - \mu}.$$

On considère alors des réels $d^{-1}P^\mu \leq K < K' \leq P^{\frac{1}{2\beta_1}}$ avec $K' = K(1 + \theta)$. On définit alors :

$$\begin{aligned}
V(K) &= \sum_{K < k \leq K'} \sum_{P^{\frac{1}{2}} < l^{\beta_2} \leq P/k^{\beta_1}} f_d(k, l), \\
V_-(K) &= \sum_{K < k \leq K'} \sum_{P^{\frac{1}{2}} < l^{\beta_2} \leq P/(K')^{\beta_1}} f_d(k, l), \\
V_+(K) &= \sum_{K < k \leq K'} \sum_{P^{\frac{1}{2}} < l^{\beta_2} \leq P/K^{\beta_1}} f_d(k, l),
\end{aligned}$$

et on remarque que :

$$V_-(K) \leq V(K) \leq V_+(K).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} V_+(K) &= F_d \left(K', P^{\frac{1}{\beta_2}} / K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right) - F_d \left(K, P^{\frac{1}{\beta_2}} / K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right) \\ &\quad - F_d \left(K', P^{\frac{1}{2\beta_2}} \right) + F_d \left(K, P^{\frac{1}{2\beta_2}} \right). \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} &F_d \left(K', P^{\frac{1}{\beta_2}} / K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right) - F_d \left(K, P^{\frac{1}{\beta_2}} / K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right) \\ &= C_d((K')^{\beta_1} - K^{\beta_1})PK^{-\beta_1} + O \left(d^v (K')^{\beta_1} PK^{-\beta_1} \min\{K', P^{\frac{1}{\beta_2}} K^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}}\}^{-\delta} \right) \\ &= C_d((1 + \theta)^{\beta_1} - 1)P + O \left(d^{v+\delta} (1 + \theta)^{\beta_1} P^{1-\mu\delta} \right), \end{aligned}$$

d'après (148). En remarquant que $(1 + \theta)^{\beta_1} = 1 + \beta_1\theta + O(\theta^2)$, on obtient :

$$F_d \left(K', P^{\frac{1}{\beta_2}} / K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right) - F_d \left(K, P^{\frac{1}{\beta_2}} / K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right) = C_d\beta_1\theta P + O(d^{v+\delta} P^{1-\mu\delta}) + O(d^v \theta^2 P).$$

De la même manière on trouve

$$F_d \left(K', P^{\frac{1}{2\beta_2}} \right) - F_d \left(K, P^{\frac{1}{2\beta_2}} \right) = C_d\beta_1\theta K^{\beta_1} P^{\frac{1}{2}} + O(d^v P^{1-\mu\delta}) + O(d^v \theta^2 P).$$

On en déduit :

$$V_+(K) = C_d\beta_1\theta P + C_d\beta_1\theta K^{\beta_1} P^{\frac{1}{2}} + O(d^v P^{1-\mu\delta}) + O(d^v \theta^2 P).$$

Par des arguments analogues, on obtient la même estimation pour $V_-(K)$, et donc

$$V(K) = C_d\beta_1\theta P + C_d\beta_1\theta K^{\beta_1} P^{\frac{1}{2}} + O(d^{v+\delta} P^{1-\mu\delta}) + O(d^v \theta^2 P).$$

On pose à présent, pour tout entier j tel que $0 \leq j < J$,

$$K_j = d^{-1} P^\mu (1 + \theta)^j.$$

On a alors

$$\begin{aligned} T_{d,2} &= \sum_{0 \leq j < J} V(K_j) \\ &= C_d\beta_1(J\theta)P + C_d\beta_1\theta P^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{J-1} K_j^{\beta_1} + O(d^{v+\delta} J P^{1-\mu\delta}) + O(d^v J \theta^2 P). \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
\theta \sum_{j=0}^{J-1} K_j^{\beta_1} &= \theta d^{-\beta_1} P^{\beta_1 \mu} \frac{(1+\theta)^{J\beta_1} - 1}{(1+\theta)^{\beta_1} - 1} \\
&= d^{-\beta_1} P^{\beta_1 \mu} \frac{dP^{\frac{1}{2}-\beta_1 \mu} - 1}{\beta_1 + O(\theta)} \\
&= \frac{1}{\beta_1} P^{\frac{1}{2}} + O(d^{-\beta_1} P^{\beta_1 \mu}) + O(P^{\frac{1}{2}} \theta).
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
T_{d,2} &= C_d \beta_1 (J\theta)P + C_d P + O(d^{v-\beta_1} P^{\frac{1}{2}+\beta_1 \mu}) \\
&\quad + O(d^v \theta^2 P) + O(d^{v+\delta} J P^{1-\mu\delta}) + O(d^v J \theta^2 P) \\
&= C_d \beta_1 (J\theta)P + O(d^v J \theta^2 P) + O(d^v P) + O(d^{v+\delta} J P^{1-\mu\delta}).
\end{aligned}$$

On choisit à présent :

$$J = \left\lfloor P^{\frac{\mu\delta}{2}} \left(\left(\frac{1}{2\beta_1} - \mu \right) \log(P) + \log(d) \right) \right\rfloor$$

Par définition de θ on a :

$$J \log(\theta + 1) = \left(\frac{1}{2\beta_1} - \mu \right) \log(P) + \log(d),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\theta &= J^{-1} \left(\left(\frac{1}{2\beta_1} - \mu \right) \log(P) + \log(d) \right) \\
&\quad + O \left(J^{-2} \left(\left(\frac{1}{2\beta_1} - \mu \right) \log(P) + \log(d) \right)^2 \right),
\end{aligned}$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}
J\theta &= \left(\left(\frac{1}{2\beta_1} - \mu \right) \log(P) + \log(d) \right) \\
&\quad + O \left(P^{-\frac{\mu\delta}{2}} \left(\left(\frac{1}{2\beta_1} - \mu \right) \log(P) + \log(d) \right) \right).
\end{aligned}$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned}
T_{d,2} &= C_d \beta_1 \left(\frac{1}{2\beta_1} - \mu \right) P \log(P) + C_d \beta_1 \log(d) P \\
&\quad + O(d^{v+\delta} \log(d) P^{1-\frac{\mu\delta}{2}} \log(P)) + O(d^v P),
\end{aligned}$$

et le lemme est démontré. □

Démonstration de la proposition 7.1. On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leq P} f_d(k, l) &= \sum_{\substack{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leq P \\ P^{\frac{1}{2}} < l^{\beta_2}}} f_d(k, l) + \sum_{\substack{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leq P \\ P^{\frac{1}{2}} < k^{\beta_1}}} f_d(k, l) - F_d(P^{\frac{1}{2\beta_1}}, P^{\frac{1}{2\beta_2}}) \\ &= \sum_{\substack{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leq P \\ P^{\frac{1}{2}} < l^{\beta_2}}} f_d(k, l) + \sum_{\substack{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leq P \\ P^{\frac{1}{2}} < k^{\beta_1}}} f_d(k, l) + O(d^v P). \end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\sum_{\substack{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leq P \\ P^{\frac{1}{2}} < l^{\beta_2}}} f_d(k, l) = T_{d,1} + T_{d,2} = \frac{1}{2} C_d P \log(P) + O(d^{v+\delta} \log(d) P),$$

d'après les deux lemmes précédents. Par symétrie, on obtient exactement le même résultat pour $\sum_{\substack{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leq P \\ P^{\frac{1}{2}} < k^{\beta_1}}} f_d(k, l)$, et la proposition est démontrée. \square

Remarque 7.5. *Par les mêmes arguments, on démontre, sous les mêmes hypothèses que :*

$$\sum_{k^{\beta_1} (l+1)^{\beta_2} \leq P} f_d(k, l) = C_d P \log(P) + O(d^{v+\delta} \log(d) P).$$

Cette remarque nous sera utile dans ce qui va suivre.

7.2 Formule asymptotique pour $N_{d,U}(B)$

L'idée est alors d'appliquer la proposition 7.1 à la fonction $h_d(k, l)$ définie en (11). Pour cela nous allons montrer que cette fonction est bien une $(\beta_1, \beta_2, C_d, D, \alpha, v, \delta)$ -fonction (pour des constantes $C_d, \delta, \beta_1, \beta_2, \alpha, v, D$ que nous préciserons).

Remarquons avant tout que, d'après la proposition 6.6, la fonction h vérifie bien la condition 1 avec $\beta_1 = m + 1 - d_1$, $\beta_2 = n - r + 1 - d_2$, $C_d = \sigma_d$ et $v = m - r + \max\{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2d_1-1} + \varepsilon, 5d_1\}$. D'autre part, par les corollaires 5.14 et 5.23, pour tout $\mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$ et $P_2 \leq P_1$, on a

$$N_{d,\mathbf{z}}(P_1) = \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}} J_{\mathbf{z}} d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} + O\left(d^v l^{m-r+4d_2} P_1^{m+1-d_1-\delta}\right)$$

$$N_{d,l,\mathbf{z}}(P_1) = \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}} J_{l,\mathbf{z}} d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} + O\left(d^v l^{m-r+4d_2} P_1^{m+1-d_1-\delta}\right)$$

uniformément pour tout $z, l < P_1^{\frac{d_1-1}{2d_2}}$ et $z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$. En notant

$$(151) \quad \tilde{N}_{d,U,l}(P_1) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \mid \mathbf{x} \mid \leq P_1 \\ l = \max\left(\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor, |\mathbf{z}| \right)\}$$

On a alors que

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{d,U,l}(P_1) &= \sum_{k \leq P_1} h_d(k, l) = \sum_{\substack{z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |z|=l}} N_{d,z}(P_1) + \sum_{\substack{z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |z| \leq l}} N_{d,l,z}(P_1) \\ &= \left(\sum_{\substack{z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |z|=l}} \mathfrak{S}_{d,z} J_z + \sum_{\substack{z \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |z| \leq l}} \mathfrak{S}_{d,z} J_{l,z} \right) l^{m-r} d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} \\ &\quad + O\left(d^v l^{n-r+1+4d_2} P_1^{m+1-d_1-\delta}\right) \end{aligned}$$

uniformément pour tout $l < P_1^{\frac{d_1-1}{2d_2}}$. On a de même, d'après le corollaire 4.15 :

$$N_{d,\mathbf{x}}(P_2) = \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}} d^{m-r} k^{m-r} P_2^{n-r+1-d_2} + O\left(d^v k^{m-r+4d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right),$$

uniformément pour tout $k < P_2^{\frac{d_2-1}{2d_1}}$ et $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$. En notant

$$(152) \quad \tilde{N}_{d,U,k}(P_2) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, |\mathbf{x}| = k \\ \max\left(\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor, |\mathbf{z}| \right) \leq P_2\}$$

On a alors que

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{d,U,k}(P_2) &= \sum_{l \leq P_2} h_d(k, l) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{x}|=k}} N_{d,\mathbf{x}}(P_2) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{x}|=k}} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}} k^{m-r} d^{m-r} P_2^{n-r+1-d_2} \\ &\quad + O\left(d^v k^{m+1+4d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right) \end{aligned}$$

uniformément pour tout $k < d^{-1} P_2^{\frac{d_2-1}{2d_1}}$. Par conséquent, h_d vérifie bien la condition 2 avec

$$c_{d,1}(k) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{x}|=k}} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{x}} J_{d,\mathbf{x}} k^{m-r} d^{m-r},$$

$$c_{d,2}(l) = \left(\sum_{\substack{\mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{z}|=l}} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}} J_{\mathbf{z}} + \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |\mathbf{z}| \leq l}} \mathfrak{S}_{d,\mathbf{z}} J_{l,\mathbf{z}} \right) l^{m-r} d^{m-r-d_1},$$

$$D = \max\{m+1+4d_1, n-r+1+4d_2\}$$

et

$$\alpha = \min\left\{\frac{d_2-1}{2d_1}, \frac{d_1-1}{2d_2}\right\}.$$

On a donc montré que h_d est une $(m+1-d_1, n-r+1-d_2, \sigma_d, D, \alpha, v, \delta)$ -fonction, et donc en notant

$$\tilde{N}_{d,U}^{(1)}(B) = \text{card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}), \right. \\ \left. F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, |\mathbf{x}|^{m+1-d_1} \max \left(\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor, |\mathbf{z}| \right)^{n-r+1-d_2} \leq B \right\}$$

et

$$\tilde{N}_{d,U}^{(2)}(B) = \text{card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}), \right. \\ \left. F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, |\mathbf{x}|^{m+1-d_1} \max \left(\left\lfloor \frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|} \right\rfloor + 1, |\mathbf{z}| + 1 \right)^{n-r+1-d_2} \leq B \right\}$$

la proposition 7.1 et la remarque 7.5 donnent :

$$\tilde{N}_{d,U}^{(i)}(B) = \sigma_d B \log(B) + O(d^v \log(d)B)$$

pour $i \in \{1, 2\}$. Par ailleurs, on observe que

$$\tilde{N}_{d,U}^{(2)}(B) \leq N_{d,U}(B) \leq \tilde{N}_{d,U}^{(1)}(B),$$

et on en déduit finalement :

Proposition 7.6. *Si $d_1, d_2 \geq 2$ et $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m$, ou si $d_1 \geq 2$, $d_2 = 1$ et $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m'$, alors pour tout $B \geq 1$, on a la formule asymptotique :*

$$N_{d,U}(B) = \sigma_d B \log(B) + O\left(d^{v+\delta} \log(d)B\right),$$

pour un certain $\delta > 0$ arbitrairement petit.

8 Conclusion et interprétation des constantes

Nous sommes à présent en mesure de donner une formule asymptotique pour

$$\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{4} \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in U \cap \mathbf{Z}^{n+2} \mid \text{pgcd}(\mathbf{x}) = 1, \text{pgcd}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1 \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq B\}.$$

On remarque en effet que si $N_{d,e}(B)$ désigne

$$\text{card}\{(d\mathbf{x}, e\mathbf{y}, e\mathbf{z}) \in U \cap (d\mathbf{Z}^{r+1} \times e\mathbf{Z}^{n-r+1}) \mid F(d\mathbf{x}, e\mathbf{y}, e\mathbf{z}) = 0, H(d\mathbf{x}, e\mathbf{y}, e\mathbf{z}) \leq B\} \\ = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in U \cap (\mathbf{Z}^{r+1} \times \mathbf{Z}^{n-r+1}) \mid F(d\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, \\ |\mathbf{x}|^{m+1-d_1} \max\left\{\frac{|\mathbf{y}|}{d|\mathbf{x}|}, |\mathbf{z}|\right\}^{n-r+1-d_2} \leq B/(d^{m+1-d_1} e^{n-r+1-d_2})\} \\ = N_{d,U}(B/(d^{m+1-d_1} e^{n-r+1-d_2}))$$

et

$$\tilde{N}_{k,l}(B) = \text{card}\{(k\mathbf{x}, l\mathbf{y}, l\mathbf{z}) \in U \cap (k\mathbf{Z}^{r+1} \times l\mathbf{Z}^{m-r} \times l\mathbf{Z}^{n-r+1}) \mid \text{pgcd}(\mathbf{x}) = 1, \\ \text{pgcd}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, H(k\mathbf{x}, l\mathbf{y}, l\mathbf{z}) \leq B\}$$

(pour $d, e, k, l \in \mathbf{N}$), alors on a

$$N_{d,e}(B) = \sum_{d|k} \sum_{e|l} \tilde{N}_{k,l}(B).$$

Par inversions de Möbius successives, et en utilisant la proposition 7.6, on obtient :

$$\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{4} \tilde{N}_{1,1}(B) = \frac{1}{4} \sum_{d \in \mathbf{N}^*} \mu(d) \sum_{e \in \mathbf{N}^*} \mu(e) N_{d,e}(B) \\ = \frac{1}{4} \sum_{d,e \in \mathbf{N}^*} \mu(d) \mu(e) N_{d,U}(B/(d^{m+1-d_1} e^{n-r+1-d_2})) \\ = \frac{1}{4} \sum_{d,e \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(d) \mu(e)}{d^{m+1-d_1} e^{n-r+1-d_2}} \sigma_d B \log(B) \\ + O\left(\sum_{d,e \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(d) \mu(e)}{d^{m+1-d_1} e^{n-r+1-d_2}} d^{v+\delta} \log(d) B\right) \\ = \frac{1}{4} \left(\sum_{e \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(e)}{e^{n-r+1-d_2}}\right) \left(\sum_{d \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(d)}{d^{m+1-d_1}} \sigma_d\right) B \log(B) + O(B),$$

car $v = m - r + \max\{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2d_1-1} + \varepsilon, 5d_1\} < (m+1-d_1) + 2$, pour r choisi assez grand, i.e. pour $r \geq 6d_1 - 3$. Par ailleurs on peut réécrire

$$\sum_{e \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(e)}{e^{n-r+1-d_2}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)$$

et

$$\sum_{d \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(d)}{d^{m+1-d_1}} \sigma_d = J \sum_{d \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(d)}{d^{m+1-d_1}} \mathfrak{S}_d d^{m-r-d_1} = J \mathfrak{S}$$

pour

$$(153) \quad \mathfrak{S} = \sum_{d \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(d)}{d^{r+1}} \mathfrak{S}_d.$$

On obtient donc finalement

Proposition 8.1. *Pour $d_1, d_2 \geq 2$, $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m$ et $r \geq 6d_1 - 3$, on a :*

$$\mathcal{N}_U(B) = \sigma B \log(B) + O(B),$$

lorsque $B \rightarrow \infty$, où l'on a noté $\sigma = \frac{1}{4} J \mathfrak{S} \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)$. On a de plus la même formule pour $d_1 \geq 2$, $d_2 = 1$, $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m'$ et $r \geq 6d_1 - 3$.

Nous allons à présent donner une interprétation des constantes introduites, et démontrer que l'expression obtenue est bien en accord avec les formules conjecturées par Peyre dans [Pe].

Rappelons que l'on a noté $\pi : X_0 \rightarrow X$ la projection du torseur universel $X_0 = (\mathbf{A}^{r+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) \times (\mathbf{A}^{n-r+1} \setminus \{\mathbf{0}\})$ sur la variété torique ambiante X . On considère un point $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in Y_0$ tel que $\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$, où

$$t_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j \in \{0, \dots, r\} \\ y_j & \text{si } j \in \{r+1, \dots, m\} \\ z_j & \text{si } j \in \{m+1, \dots, n+1\} \end{cases}$$

et on note $P = \pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. La forme de Leray ω_L sur un voisinage de $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sur lequel $\frac{\partial F}{\partial t_j} \neq \mathbf{0}$ est alors donnée par

$$\omega_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{(-1)^{n+2-j}}{\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} dt_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Pour toute place $\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})$ la forme de Leray induit une mesure locale $\omega_{L,\nu}$.

On suppose à présent que le point $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ est tel que, par exemple, $x_0 \neq 0$, $z_{m+1} \neq 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq 0$. Pour toute place ν de \mathbf{Q} , on considère le morphisme

$$\begin{aligned} \rho : X_{\mathbf{Q}_\nu} &\rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_\nu}^{n-1} \\ \pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_r}{x_0}, \frac{y_{r+1}}{x_0 z_{m+1}}, \dots, \frac{y_m}{x_0 z_{m+1}}, \frac{z_{m+2}}{z_{m+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{m+1}} \right). \end{aligned}$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert de P noté V sur lequel ρ est bien défini et induit un isomorphisme analytique sur $\rho(V)$. On pose $W = \pi^{-1}(V)$. Si l'on note

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (1, u_1, \dots, u_r) \\ \mathbf{v} &= (v_{r+1}, \dots, v_m) \\ \mathbf{w} &= (1, w_{m+2}, \dots, w_{n+1}) \end{aligned},$$

la mesure de Tamagawa ω_ν est définie par

$$\rho_* \omega_\nu = \frac{du_{1,\nu} \dots du_{r,\nu} dv_{r+1,\nu} \dots dv_{m,\nu} dw_{m+2,\nu} \dots dw_{n,\nu}}{h_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \right|_\nu},$$

où w_{n+1} est implicitement défini par $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, et

$$h_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = h_\nu^{(1)}(\mathbf{u}) h_\nu^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

pour

$$\begin{aligned} h_\nu^{(1)}(\mathbf{u}) &= |\mathbf{u}|_\nu^{m+1-d_1} \\ h_\nu^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \max \left(\frac{|\mathbf{v}|_\nu}{|\mathbf{u}|_\nu}, |\mathbf{w}|_\nu \right)^{n-r+1-d_2}, \end{aligned}$$

où pour tout vecteur $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$,

$$|\mathbf{x}|_\nu = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|_\nu.$$

8.1 Étude de l'intégrale singulière J

Rappelons que l'intégrale J est définie par

$$J = \int_{\mathbf{R}} \int_{\substack{|\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| \leq 1 \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} e(\beta F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} d\beta.$$

et cette intégrale est absolument convergente. On pose par ailleurs :

$$\sigma_\infty(Y) = \int_{\substack{\pi^{-1}(Y) \cap \{|\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| \leq 1 \\ |\mathbf{z}| \leq 1\}}} \omega_{L,\infty}.$$

Nous allons montrer que l'intégrale J coïncide avec $\sigma_\infty(Y)$. Il nous suffit de le vérifier localement i.e. montrons que pour tout ouvert V' de $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| \leq 1, |\mathbf{z}| \leq 1\}$ sur lequel, par exemple, $\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq 0$,

$$\int_{V' \cap \pi^{-1}(Y)} \omega_{L,\infty} = \int_{V' \cap \pi^{-1}(Y)} \frac{1}{\left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \right|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\hat{\mathbf{z}},$$

(avec $d\hat{\mathbf{z}} = dz_{m+1} \dots dz_n$) coïncide avec

$$J_{V'} = \int_{\mathbf{R}} \int_{V'} e(\beta F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} d\beta.$$

Considérons donc un tel ouvert V' . On note alors $t = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, et z_{n+1} est alors défini implicitement par $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t$ sur V' . On note $z_{n+1} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t)$. Par changement de variables, on a alors :

$$J_{V'} = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \int_{[-1,1]^{n+1}} \frac{\chi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}) e(\beta t)}{\left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t)) \right|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\hat{\mathbf{z}} dt d\beta$$

où

$$\chi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t)) \in V' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction $t \mapsto \frac{\chi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}) e(\beta t)}{\left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t)) \right|}$ est à variations bornées, par conséquent, par application des résultats d'analyse de Fourier (voir [W-W, 9.43]) on a que

$$\begin{aligned} J_{V'} &= \int_{[-1,1]^{n+1}} \frac{\chi(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}})}{\left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, 0)) \right|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\hat{\mathbf{z}} \\ &= \int_{V' \cap \pi^{-1}(Y)} \omega_{L,\infty}. \end{aligned}$$

Remarquons que ces calculs constituent un équivalent du travail effectué par Igusa dans [Ig, §IV.6] pour le cas des intégrales de fonctions indicatrices.

Nous allons à présent interpréter cette constante J en termes de mesures de Tamagawa. Plus précisément, en notant $\tau_\infty = \omega_\infty$, nous allons démontrer le résultat suivant :

Lemme 8.2. *On a*

$$\tau_\infty = \frac{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}{4} \sigma_\infty.$$

Démonstration. Il nous suffit de montrer que par exemple pour l'ouvert V défini précédemment, on a $\tau_\infty(V) = \frac{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}{4} \sigma_\infty(V)$. Par définition de la mesure de Leray,

$$\sigma_\infty(V) = \int_{\substack{\pi^{-1}(V) \cap \{|x| \leq 1 \\ |y| \leq |x|, |z| \leq 1}}} \frac{dx dy dz}{\left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(x, y, z) \right|}.$$

On remarque que

$$\max_i |x_i| \leq 1 \Leftrightarrow |x_0| \leq \left(\max_i \frac{|x_i|}{|x_0|} \right)^{-1}.$$

On applique alors les changements de variables $x_i = x_0 u_i$, $y_j = z_{m+1} x_0 v_j$ et $z_k = z_{m+1} w_k$ dans l'intégrale ci-dessus. On a alors que

$$\begin{aligned} \begin{cases} |y| \leq |x| \leq 1 \\ |z| \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |x_0| \leq (|u|)^{-1} \\ |z_{m+1}| |v| \leq |u| \\ |z_{m+1}| \leq |w|^{-1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x_0|^{m+1-d_1} \leq h_\infty^{(1)}(u)^{-1} \\ |z_{m+1}|^{n-r+1-d_2} \leq h_\infty^{(2)}(u, v, w)^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \sigma_\infty(V) &= \int_V \frac{1}{\left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(x, y, z) \right|} \int_{\substack{|x_0|^{m+1-d_1} \leq h_\infty^{(1)}(u)^{-1} \\ |z_{m+1}|^{n-r+1-d_2} \leq h_\infty^{(2)}(u, v, w)^{-1}}} \\ &\quad |x_0|^{m-d_1} |z_{m+1}|^{n-r-d_2} dx_0 dz_{m+1} du dv d\hat{w} \\ &= \frac{4}{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)} \int_{\rho(V)} \frac{du dv d\hat{w}}{h_\infty(u, v, w) \left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(x, y, z) \right|} \\ &= \frac{4}{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)} \int_V \omega_\infty. \end{aligned}$$

□

8.2 Étude de la série singulière \mathfrak{S}

Rappelons que \mathfrak{S} est définie par :

$$\mathfrak{S} = \sum_{d \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(d)}{d^{r+1}} \mathfrak{S}_d,$$

avec

$$\mathfrak{S}_d = \sum_{q=1}^{\infty} A_d(q)$$

où

$$A_d(q) = q^{-(n+2)} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*} \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} e \left(\frac{a}{q} F(d\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right).$$

Lemme 8.3. *Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, la fonction A_d est multiplicative.*

Démonstration. On considère deux entiers q_1, q_2 tels que $\text{pgcd}(q_1, q_2) = 1$, et posons $q = q_1 q_2$. Montrons qu'alors $A_d(q) = A_d(q_1) A_d(q_2)$. On remarque que

$$A_d(q_1) A_d(q_2) = q^{-(n+2)} \sum_{\substack{a_1 \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^* \\ a_2 \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^*}} \sum_{\substack{(\mathbf{b}_1^{(1)}, \mathbf{b}_2^{(1)}, \mathbf{b}_3^{(1)}) \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^{n+2} \\ (\mathbf{b}_1^{(2)}, \mathbf{b}_2^{(2)}, \mathbf{b}_3^{(2)}) \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^{n+2}}} e \left(\frac{a_1 q_2 F(d\mathbf{b}_1^{(1)}, \mathbf{b}_2^{(1)}, \mathbf{b}_3^{(1)}) + a_2 q_1 F(d\mathbf{b}_1^{(2)}, \mathbf{b}_2^{(2)}, \mathbf{b}_3^{(2)})}{q} \right).$$

Or si l'on considère l'unique élément $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}$ tel que

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \begin{cases} \mathbf{b}_i \equiv \mathbf{b}_i^{(1)}(q_1) \\ \mathbf{b}_i \equiv \mathbf{b}_i^{(2)}(q_2) \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} q_2 F(d\mathbf{b}_1^{(1)}, \mathbf{b}_2^{(1)}, \mathbf{b}_3^{(1)}) \equiv q_2 F(d\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \pmod{q} \\ q_1 F(d\mathbf{b}_1^{(2)}, \mathbf{b}_2^{(2)}, \mathbf{b}_3^{(2)}) \equiv q_1 F(d\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \pmod{q} \end{cases}$$

et ainsi :

$$A_d(q_1) A_d(q_2) = q^{-(n+2)} \sum_{\substack{a_1 \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^* \\ a_2 \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^*}} \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} e \left(\frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{q} F(d\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right).$$

Or l'application :

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^* &\rightarrow (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^* \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 q_2 + a_2 q_1 \end{aligned}$$

est bijective. On obtient donc finalement :

$$A_d(q_1) A_d(q_2) = A_d(q).$$

□

Puisque \mathfrak{S}_d est de plus absolument convergente (cf. lemme 3.19), on a :

$$\mathfrak{S}_d = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sigma_{d,p}$$

où

$$\sigma_{d,p} = \sum_{k=0}^{\infty} A_d(p^k).$$

On remarque par ailleurs que pour tous $d, k \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z})^{n+2}} e \left(\frac{a}{p^k} F(d\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) \\ = \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z})^{n+2}} e \left(\frac{a}{p^k} F(p^{v_p(d)} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) \end{aligned}$$

et donc :

$$A_d(p^k) = A_{p^{v_p(d)}}(p^k).$$

Par conséquent, pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\frac{\mu(d)}{d^{r+1}} \mathfrak{S}_d = \prod_{p \in \mathcal{P}} B_{p^{v_p(d)}}$$

où pour tout $\nu \in \mathbf{N}^*$:

$$B_{p^\nu} = \frac{\mu(p^\nu)}{p^{\nu(r+1)}} \sum_{k=0}^{\infty} A_{p^\nu}(p^k).$$

Remarquons que $B_{p^\nu} = 0$ pour tout $\nu \geq 2$. La série $\sum_{d \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(d)}{d^{r+1}} \mathfrak{S}_d$ étant absolument convergente, on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{d \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(d)}{d^{r+1}} \mathfrak{S}_d &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} B_{p^\nu} \right) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{\nu=0}^1 B_{p^\nu} \right) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(A_1(p^k) - \frac{A_p(p^k)}{p^{r+1}} \right) \right)}_{\sigma'_p}. \end{aligned}$$

Notons à présent

(154)

$$M_p(k) = \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z})^{n+2} \mid \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0 (p^k) \right\}$$

Lemme 8.4. *Pour tout entier $N > 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^N \left(A_1(p^k) - \frac{A_p(p^k)}{p^{r+1}} \right) = \frac{M_p(N)}{p^{N(n+1)}},$$

et donc

$$\sigma'_p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_p(N)}{p^{N(n+1)}}.$$

Démonstration. On pose $q = p^N$. Il est immédiat que

$$\begin{aligned} q^{-1} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} e \left(\frac{t}{q} F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) \\ = \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2} \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0 \pmod{q} \right\}, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} q^{-1} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} e \left(\frac{a}{q} F(p\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) \\ = p^{r+1} \text{Card} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2} \mid \mathbf{x} \equiv \mathbf{0} \pmod{p} \text{ et } F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0 \pmod{q} \right\} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} M_p(N) &= q^{-1} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} \left(e \left(\frac{t}{q} F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) - \frac{1}{p^{r+1}} e \left(\frac{t}{q} F(p\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) \right) \\ &= q^{-1} \sum_{\substack{q_1 \mid q \\ \text{pgcd}(a, q_1)=1}} \sum_{0 \leq a < q_1} \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} \left(e \left(\frac{a}{q_1} F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) - \frac{1}{p^{r+1}} e \left(\frac{a}{q_1} F(p\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) \right) \\ &= p^{-N} \sum_{k=1}^N \frac{p^{N(n+2)}}{p^{k(n+2)}} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*} \sum_{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+2}} \left(e \left(\frac{a}{p^k} F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) - \frac{1}{p^{r+1}} e \left(\frac{a}{p^k} F(p\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \right) \right) \\ &= p^{N(n+1)} \sum_{k=0}^N \left(A_1(p^k) - \frac{A_p(p^k)}{p^{r+1}} \right) \end{aligned}$$

□

Nous allons à présent interpréter les constantes σ'_p en terme de mesures de Tamagawa τ_p définies par

$$\tau_p = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \omega_p.$$

Pour cela nous commençons par établir deux lemmes intermédiaires :

Lemme 8.5. *Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on note*

$$W_p^*(N) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}_p/p^N)^{n+2} \mid \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p), \\ (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \not\equiv \mathbf{0} (p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0 (p^r)\}$$

ainsi que $M_p^*(N) = \text{Card } W^*(N)$. Il existe alors un entier N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$:

$$\int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2} \\ \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p), (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \not\equiv \mathbf{0} (p) \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p} = \frac{M_p^*(N)}{p^{N(n+1)}}.$$

Démonstration. Soit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}$. Dans tout ce qui suit, on note

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \pmod{p^N}.$$

On écrit alors :

(155)

$$\int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}, \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \not\equiv \mathbf{0} (p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p} = \sum_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \pmod{p^N} \\ \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p), (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \not\equiv \mathbf{0} (p) \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0 (p^N)}} \int_{\substack{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}, \\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})=0}} \omega_{L,p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

(156)

$$= \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in W_p^*(N)} \int_{\substack{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}, \\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})=0}} \omega_{L,p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Puisque Y est lisse, il existe un $N > 0$ assez grand tel que, pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}_p/p^N)^{n+2}$ tel que $\mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p)$, $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \not\equiv \mathbf{0} (p)$, et $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$:

$$c = \inf_{i,j,k} \left\{ v_p \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \right), v_p \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \right), v_p \left(\frac{\partial F}{\partial z_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \right) \right\}$$

soit non nul et constant sur la classe définie par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. On peut supposer que $N > c$ et que $c = v_p \left(\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \right)$. On considère $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}$ tel que $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, et $(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') \in \mathbf{Z}_p^{n+2}$ quelconque. On a alors

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}') = F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \sum_{i=0}^r \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) u'_i \\ + \sum_{j=r+1}^m \frac{\partial F}{\partial y_j}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) v'_j + \sum_{k=m+1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial z_k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) w'_k + G(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'),$$

où $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}')$ est une somme de termes contenant au moins deux facteurs u'_i, v'_j ou w'_k . Ainsi, on a donc, si $(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') \in (p^N \mathbf{Z}_p)^{n+2}$:

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}') \equiv F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^{N+c}}.$$

Par conséquent, l'image de $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ dans \mathbf{Z}_p/p^{N+c} dépend uniquement de $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^N} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, on note alors $F^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ cette image.

Si $F^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq 0$, alors l'intégrale

$$\int_{\substack{\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}, \\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0\}}} \omega_{L,p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

est nulle, et l'ensemble

$$\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^{N+c}} \mid [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv 0 \pmod{p^{N+c}}\}$$

est vide.

Si $F^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ alors, par le lemme de Hensel, les applications coordonnées $X_0, \dots, X_r, Y_{r+1}, \dots, Y_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n$ définissent un isomorphisme de

$$\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2} \mid [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0\}$$

sur

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}) + (p^N \mathbf{Z}_p)^{n+1},$$

où $\hat{\mathbf{z}} = (z_{m+1}, \dots, z_n)$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}, \\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0\}}} \omega_{L,p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \int_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}) + (p^N \mathbf{Z}_p)^{n+1}} p^c du_{0,p} \dots du_{r,p} dv_{r+1,p} \dots dv_{m,p} dw_{m+1,p} \dots dw_{n,p} = p^{c-N(n+1)}. \end{aligned}$$

On a d'autre part, puisque $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^{N+c}}$ ne dépend que de $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$:

$$\begin{aligned} & p^{-(N+c)(n+1)} \text{card}\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^{N+c}} \mid [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ & F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv 0 \pmod{p^{N+c}}\} = p^{-(N+c)(n+1)} p^{(n+1)c} = p^{c-N(n+1)}. \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \pmod{p} \\ (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq \mathbf{0} \pmod{p}, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}}} \omega_{L,p} = \sum_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in W_p^*(N) \\ F^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0}} p^{c-N(n+1)} \\ &= \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in W_p^*(N)} p^{-(N+c)(n+1)} \text{card}\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^{N+c}} \mid [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_N = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ & F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv 0 \pmod{p^{N+c}}\} = \frac{M_p^*(N+c)}{p^{(N+c)(n+1)}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme 8.6. *On a*

$$\int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2} \\ \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p), (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \not\equiv \mathbf{0} (p) \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p} = \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right) \int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2} \\ \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p},$$

et d'autre part

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_p^*(N)}{p^{N(n+1)}} = \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right) \sigma'_p.$$

Démonstration. La première partie du lemme résulte du fait que :

$$\omega_{L,p}(\mathbf{x}, p\mathbf{y}, p\mathbf{z}) = p^{-(n-r+1-d_2)} \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Pour la deuxième partie, on considère un entier j tel que $N \geq jd_2 + 1$ et on considère l'ensemble

$$\begin{aligned} \tilde{N}(j) = \text{Card}\{ & \mathbf{x} \in (\mathbf{Z}_p/p^N \mathbf{Z}_p)^{r+1}, (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (p^j \mathbf{Z}_p/p^N \mathbf{Z}_p)^{n-r+1} \mid \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p), \\ & (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \not\equiv \mathbf{0} (p^{j+1}), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0 (p^N)\} \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $N > jd_2$

$$\begin{aligned} \tilde{N}(j) = \text{Card}\{ & \mathbf{x} \in (\mathbf{Z}/p^N \mathbf{Z})^{r+1}, (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}/p^{N-j} \mathbf{Z})^{n-r+1} \mid \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0} (p), \\ & (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \not\equiv \mathbf{0} (p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0 (p^{N-jd_2})\} \\ & = p^{(r+1)jd_2 + (n-r+1)(jd_2-j)} M^*(N - jd_2) \end{aligned}$$

Soit N_0 comme dans le lemme précédent, et soit $j_0 = \lceil (N - N_0)/d_2 \rceil$. On a alors

$$\begin{aligned} M_p(N) &= \sum_{0 \leq jd_2 \leq N - N_0} \tilde{N}(j) \\ &\quad + O(\text{Card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}/p^N \mathbf{Z})^{n+2} \mid (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0} (p^{j_0})\}) \\ &= \sum_{0 \leq jd_2 \leq N - N_0} p^{(r+1)jd_2 + (n-r+1)(jd_2-j)} M_p^*(N - jd_2) + O(p^{N(n+2) - j_0(n-r+1)}) \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme précédent :

$$\frac{M_p^*(N - jd_2)}{p^{(N-jd_2)(n+1)}} = \frac{M_p^*(N)}{p^{N(n+1)}},$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} M_p(N) &= \sum_{0 \leq j \leq N-N_0} p^{-j(n-r+1)+jd_2} M_p^*(N) + O\left(p^{N(n+2)-j_0(n-r+1)}\right) \\ &= M_p^*(N) \frac{1 - p^{-(N-N_0+1)(n-r+1-d_2)}}{1 - p^{-(n-r+1-d_2)}} + O\left(p^{N(n+2)-j_0(n-r+1)}\right), \end{aligned}$$

et puisque $\sigma'_p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_p(N)}{p^{N(n+1)}}$, on obtient le résultat. \square

On déduit des lemmes 8.5 et 8.6 que

$$(157) \quad \sigma'_p = \int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \ (p), \ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p}.$$

On conclut alors en utilisant le lemme ci-dessous :

Lemme 8.7. *On pose :*

$$a(p) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)^{-1}.$$

On a alors

$$\int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \ (p), \ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p} = \int_{Y_0(\mathbf{Q}_p) \cap \{|\mathbf{x}|_p=1 \\ h_p^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq 1\}} \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(p) \omega_p(Y(\mathbf{Q}_p)).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout ouvert V de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{n-1} \subset X(\mathbf{Q}_p)$ tel que pour tout $P = \pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in V$ on a (par exemple) $x_0 z_{m+1} \neq 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq 0$ (les autres cas se traitant de façon analogue) l'égalité

$$\int_{\substack{\pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(Y) \\ \cap \{|\mathbf{x}|_p=1, h_p^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq 1\}}} \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(p) \omega_p(V \cap Y)$$

est vérifiée. Remarquons dans un premier temps que, pour un tel ouvert V , on a

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \omega_p(V \cap Y) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{V \cap Y} \frac{du_{1,p} \dots du_{r,p} dv_{r+1,p} \dots dv_{m,p} dw_{m+2,p} \dots dw_{n,p}}{\left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \right|_p h_p^1(\mathbf{u}) h_p^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}$$

En appliquant deux fois le lemme 5.4.5 de [Pe], on obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{p^{m+1-d_1}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)^{-1} \omega_p(V) \\
&= \int_{\substack{\pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(Y) \\ \cap \{h_p^{(1)}(\mathbf{x}) \leq 1, h_p^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq 1\}}} \frac{dx dy d\hat{z}}{\left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \right|_p} \\
&= \int_{\substack{\pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(Y) \\ \cap \{h_p^{(1)}(\mathbf{x}) \leq 1, h_p^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq 1\}}} \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Or, étant donné que

$$\omega_{L,p}(p\mathbf{x}, p\mathbf{y}, \mathbf{z}) = p^{-(m+1-d_1)} \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(Y) \\ \cap \{h_p^{(1)}(\mathbf{x}) \leq 1, h_p^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq 1\}}} \omega_{L,p} \\
&= \left(1 - \frac{1}{p^{m+1-d_1}}\right)^{-1} \int_{\substack{X_0(\mathbf{Q}_p) \cap \pi^{-1}(Y) \\ \cap \{|\mathbf{x}|_p = 1, h_p^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq 1\}}} \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})
\end{aligned}$$

et on obtient le résultat souhaité. \square

On déduit de ce lemme et de la formule (157) que

$$\left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right) \sigma'_p = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \omega_p(Y(\mathbf{Q}_p)) = \tau_p(Y(\mathbf{Q}_p)).$$

8.3 Conclusion

Rappelons que la formule asymptotique conjecturée par Peyre dans [Pe], dans sa version corrigée par Batyrev et Tschinkel, pour le nombre $\mathcal{N}_U(B)$ de points de hauteur bornée par B sur l'ouvert U de Zariski de la variété Y (pour la hauteur associée au fibré anticanonique ω_Y^{-1}) est :

$$(158) \quad \alpha(Y) \beta(Y) \tau_H(Y) B \log(B)^{\text{rg}(\text{Pic}(Y))-1}$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha(Y) &= \frac{1}{(\text{rg}(\text{Pic}(Y)) - 1)!} \int_{\Lambda_{\text{eff}}^1(Y)^\vee} e^{-\langle \omega_Y^{-1}, y \rangle} dy, \\
\Lambda_{\text{eff}}^1(Y)^\vee &= \{y \in \text{Pic}(Y) \otimes \mathbf{R}^\vee \mid \forall x \in \Lambda_{\text{eff}}^1(Y), \langle x, y \rangle \geq 0\}
\end{aligned}$$

et

$$\beta(Y) = \text{card}(H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(\overline{Y}))),$$

$$\tau_H(Y) = \prod_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})} \tau_\nu(Y(\mathbf{Q}_\nu)).$$

Dans le cas présent on a

$$\begin{aligned} \text{Pic}(Y) &= \mathbf{Z}[\tilde{D}_0] \oplus \mathbf{Z}[\tilde{D}_{n+1}] \simeq \mathbf{Z}^2, \quad \text{rg}(\text{Pic}(Y)) = 2, \\ -[K_Y] &= (m+1-d_1)[\tilde{D}_0] + (n-r+1-d_2)[\tilde{D}_{n+1}], \\ \Lambda_{\text{eff}}^1(Y) &= \mathbf{R}^+[\tilde{D}_0] + \mathbf{R}^+[\tilde{D}_{n+1}] \simeq (\mathbf{R}^+)^2. \end{aligned}$$

On a par conséquent :

$$\alpha(Y) = \int_{[0,+\infty]^2} e^{-(m+1-d_1)t_1 - (n-r+1-d_2)t_2} dt_1 dt_2 = \frac{1}{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}.$$

D'autre part $\text{Pic}(\bar{Y}) \simeq \mathbf{Z}^3$, et le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ agit trivialement sur $\text{Pic}(\bar{Y})$, on a donc

$$\beta(Y) = 1.$$

Par ailleurs, d'après ce qui a été vu dans les sections précédentes, on a

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \tau_p(Y(\mathbf{Q}_p)) = \mathfrak{S} \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}} \right)$$

et

$$\tau_\infty(Y(\mathbf{R})) = \frac{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}{4} J.$$

Ainsi on a :

$$\alpha(Y)\beta(Y)\tau_H(Y)B \log(B)^{\text{rg}(\text{Pic}(Y))-1} = \frac{1}{4} \mathfrak{S} J \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}} \right) B \log(B),$$

et on retrouve bien la formule de la proposition 8.1. Nous avons donc démontré le résultat ci-dessous :

Théorème 8.8. *Pour $d_1, d_2 \geq 2$, $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m \geq 2^{d_1+d_2}$ (avec $m \leq 13d_2(d_1+d_2)2^{d_1+d_2}$) et $r \geq 6d_1 - 3$, on a :*

$$\mathcal{N}_U(B) = C_H(X)B \log(B) + O(B),$$

où $C_H(X)$ est la constante conjecturée par Peyre, lorsque $B \rightarrow \infty$. On a de plus la même formule pour $d_1 \geq 2$, $d_2 = 1$, $n+2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > m' \geq 2^{d_1+d_2}$ et $r \geq 6d_1 - 3$.

Références

- [B-B] V. Blomer, J. Brüdern, *Counting in hyperbolic spikes : the diophantine analysis of multihomogeneous diagonal equations*, arXiv : 1402.1122v1.
- [B-T] V. V. Batyrev, Yu. Tschinkel, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Astérisque. **251** (1998) 299-340.
- [Bi] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. Ser A **265** (1961) 245-263.
- [Br] T.D. Browning *Quantitative Arithmetic of Projective Varieties*, Progress in Mathematics. **277**. Birkhäuser (2009).
- [Da] H. Davenport, *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities*, 2^{ème} édition, Cambridge University Press, (2005).
- [F] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies, **131**, Princeton University Press, (1993).
- [G-D] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *éléments de géométrie algébrique. IV. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, troisième partie, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **28**. (1964-67). 5-255.
- [Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. **52**, Springer-Verlag, New York (1977).
- [HB] D. R. Heath-Brown, *The density of rational points on curves and surfaces*, Ann. Math. **155** (2002) 553-598.
- [Ig] J. I. Igusa, *Lectures on forms of higher degree*, Tata institute of fundamental research, Bombay and Springer-Verlag, Berlin (1978).
- [K] P. Kleinschmidt, *A classification of toric varieties with few generators*, Aequationes Math. **35** (1988) 254-266.
- [M-V] D. Masser, J.D. Vaaler *Counting algebraic numbers with large height II*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007) 427-445.
- [Pe] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79**. (1995) 101-218.
- [P-T] E. Peyre, Y. Tschinkel, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces, numerical evidence*, Math. of Comp. **70** (2000) 367-387.
- [Sa] P. Salberger *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Astérisque. **251** (1998) 91-258.
- [Sch1] D. Schindler, *Bihomogeneous forms in many variables*, arXiv. 1301.6516.
- [Sch2] D. Schindler, *Manin's conjecture for certain biprojective hypersurfaces*, arXiv. 1307.7069.

- [Schm] W. M. Schmidt, *The density of integer points on homogeneous varieties*, Acta. Math. **154** (1985) 243-296.
- [W-W] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Modern Analysis*, Cambridge University Press, (1927).
- [Wi] M. L. Widmer, *Counting primitive points of bounded height*, arXiv. 1204.0927.